



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING

ÚSTAV PROCESNÍHO INŽENÝRSTVÍ

INSTITUTE OF PROCESS ENGINEERING

**TVORBA SOFTWARE PRO PEVNOSTNÍ
ANALÝZY**

DEVELOPMENT OF STRUCTURAL ANALYSIS SOFTWARE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Anežka Michálková

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. Tomáš Létal, Ph.D.

BRNO 2019

Zadání bakalářské práce

Ústav: Ústav procesního inženýrství
Studentka: **Anežka Michálková**
Studijní program: Strojírenství
Studijní obor: Základy strojního inženýrství
Vedoucí práce: **Ing. Tomáš Létal, Ph.D.**
Akademický rok: 2018/19

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Tvorba softwaru pro pevnostní analýzy

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Metoda konečných prvků (MKP) nachází stále širší uplatnění v procesním i energetickém průmyslu. Tvorba vlastního MKP softwaru vyžaduje komplexní pochopení problematiky a získané zkušenosti lze uplatnit jak při použití profesionálních MKP softwarů, tak i při řešení analogických problémových úloh, které dostupné softwary zatím řešit neumí. Práce je zaměřena na tvorbu softwaru pro pevnostní analýzy úloh vybraných typů.

Cíle bakalářské práce:

Seznámit se s metodou konečných prvků.

Seznámit se s prutovými prvky.

Vytvořit program umožňující obecné zadání obecné soustavy těchto prvků, aplikaci zatížení, výpočet a zobrazení výsledků.

Demonstrovat funkčnost programu na vybraných příkladech.

Seznam doporučené literatury:

The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals [online]. B.m.: Elsevier, 2013 [vid. 2018-1-23]. ISBN 978-1-85617-633-0. Dostupné z: doi:10.1016/C2009-0-24909-9

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2018/19

V Brně, dne

L. S.

.....

prof. Ing. Petr Stehlík, CSc., dr. h. c.

ředitel ústavu

.....

doc. Ing. Jaroslav Katolický, Ph.D.

děkan fakulty

ABSTRAKT

Tato bakalářská práce se zabývá tvorbou softwaru pro pevnostní analýzu prutových prvků pomocí metody konečných prvků. V práci je nejprve uvedena základní teorie této metody potřebná pro účely vytvoření softwaru. Další část práce pojednává o softwaru samotném. Důležitou součástí tvorby softwaru bylo převedení matematické teorie do jednoduchých algoritmů, které jsou v práci vysvětleny. Poslední část se věnuje porovnání výsledků pevnostní analýzy získaných navrženým softwarem a softwarem ANSYS Workbench.

ABSTRACT

This bachelor thesis deals with a development of software for strength analysis of truss and beam elements using the Finite Element Method. Firstly, this thesis introduces basic theory of this method which is necessary for development of the software. Next part of the thesis discusses the software itself. Essential feature of development of the software was to transform mathematical theory to uncomplicated algorithms which are explained in the thesis. Last part is dedicated to comparison of the strength analysis results gained from the developed software and from ANSYS Workbench.

KLÍČOVÁ SLOVA

Metoda konečných prvků, pevnostní analýza, prutové prvky, Python, tvorba softwaru

KEYWORDS

Finite Element Method, strength analysis, truss and beam elements, Python, software development

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

MICHÁLKOVÁ, Anežka. *Tvorba softwaru pro pevnostní analýzy*. Brno, 2019. Dostupné také z: <https://www.vutbr.cz/studenti/zav-prace/detail/116758>. Bakalářská práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, Ústav procesního inženýrství. Vedoucí práce Ing. Tomáš Létal, Ph.D.

PODĚKOVÁNÍ

Tímto bych chtěla poděkovat Ing. Tomáši Létalovi, Ph.D. za cenné rady a připomínky, které mi během práce poskytl, a také za vstřícnost při konzultacích. Dále bych chtěla poděkovat své rodině za podporu během celého studia.

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že tato práce je mým původním dílem, zpracovala jsem ji samostatně pod vedením Ing. Tomáše Létala, Ph.D. a s použitím literatury uvedené v seznamu literatury.

V Brně dne 23. 5. 2019

.....

Anežka Michálková

OBSAH

1	ÚVOD.....	17
2	METODA KONEČNÝCH PRVKŮ.....	19
2.1	Vznik	19
2.2	Odvození základní rovnice MKP	20
2.2.1	Diskretizace	20
2.3	Prutové prvky	21
2.3.1	Osově zatížený prvek v 1D.....	21
2.3.2	Osově zatížený prvek ve 2D.....	25
2.3.3	Nosníkový prvek.....	27
2.3.4	Rámový prvek.....	29
3	TVORBA SOFTWARE.....	33
3.1	Práce uživatele se softwarem.....	33
3.1.1	Zadání úlohy	34
3.2	Jak software pracuje a jeho výstup	36
3.2.1	Postup softwaru	36
3.2.2	Výstup.....	42
4	ZHODNOCENÍ A DISKUZE.....	45
4.1	Porovnání prvku namáhaného v ose	45
4.2	Porovnání nosníkového prvku	48
4.3	Porovnání rámového prvku	52
4.4	Omezení softwaru a nastínění možné budoucí práce	55
4.4.1	Omezení a nedostatky softwaru.....	55
4.4.2	Budoucí práce	56
5	ZÁVĚR	57
	SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY.....	59
	SEZNAM SYMBOLŮ	61
	SEZNAM OBRÁZKŮ	63
	SEZNAM TABULEK.....	65
	SEZNAM PŘÍLOH.....	67

1 ÚVOD

Tato práce se zabývá návrhem softwaru pro pevnostní analýzu s využitím metody konečných prvků (MKP). Software je omezen pro rovinné prutové prvky zatížené silami a momenty a byl vytvořen v programovacím jazyku Python.

Tvorba vlastního MKP softwaru vyžaduje komplexní pochopení této problematiky, což mě vedlo k zájmu o tuto bakalářskou práci. Získané znalosti lze využít jak při použití komerčních MKP softwarů, tak při řešení analogických problémů jinými cestami. Vytvořený software může sloužit k pevnostním výpočtům jednodušších soustav s pruty, protože není vždy možné mít přístup ke komerčním softwarům například z důvodu jejich ceny. Stejně tak může sloužit při výuce, protože syntax Pythonu je přehledná a jednoduchá a je tedy možné snadno sledovat postup softwaru například v přiřazování prvkových matic do celkové matice tuhosti nebo v aplikaci okrajových podmínek. Stejně tak je možné díky způsobu zadávání úlohy rychle měnit zatížení, příčný průřez prutu nebo okrajové podmínky a sledovat tak vliv těchto změn na deformaci a napětí prutu.

První kapitola se věnuje teorii metody konečných prvků. Začíná vznikem a historickým vývojem metody, dále pojednává o jejích základech a následně se věnuje jednotlivým typům prvků, které jsou v této práci použity. Konkrétně se jedná o prvek zatížený v ose, tedy namáhaný pouze tahem a tlakem, dále je to nosníkový prvek, který je namáhan ohybem, a jako poslední rámový prvek, který je kombinací obou předchozích.

Další kapitola je věnována samotnému softwaru. Nejdříve je popsána práce uživatele se softwarem, tedy jak uživatel software nainstaluje a jak s ním má pracovat. Na vzorovém příkladu je vysvětleno, jak správně zadat nutné údaje k výpočtu dané úlohy. Poté je nejdříve obecně vysvětlen postup softwaru, následně jsou na konkrétním příkladu ukázány a vysvětleny jednotlivé kroky. Uveden je i výstup softwaru a výsledky této úlohy jsou porovnány s analytickým řešením.

V poslední kapitole jsou porovnány výsledky pevnostní analýzy z navrženého softwaru s výsledky získanými z programu ANSYS Workbench. Porovnání je provedeno pro všechny tři typy úloh. Poté jsou uvedena omezení softwaru a je nastíněno, jak by se daly odstranit v budoucí práci a co dalšího by bylo možno udělat. V závěru je provedeno celkové zhodnocení.

2 METODA KONEČNÝCH PRVKŮ

Metoda konečných prvků (dále jen MKP) je dnes jednou z nejvíce používaných numerických metod k řešení problémů v oblasti inženýrství. Používá se pro řešení úloh, které jsou popsány diferenciálními, integrodiferenciálními a integrálními rovnicemi. Typickými problémy, které se v dnešní době touto metodou řeší, jsou například napěťová analýza, vibrace a vlastní frekvence, přenos tepla, proudění nebo rozložení elektrického/magnetického potenciálu. Většina těchto problémů (kromě nejjednodušších případů) se nedá vyřešit analyticky v uzavřeném tvaru.

Jedním z hlavních znaků MKP je diskretizace tj. rozdělení spojitě oblasti na konečný počet podoblastí a následná aproximace řešení na danou spojitou oblast. Těmito podoblastem se říká prvky. Na rozdíl od analytické pružnosti, která pracuje s prvkem nekonečně malým, jsou tyto prvky konečných rozměrů (výjimkou je řešení 2D úloh s uvažováním rovinné deformace – rozměr kolmo na rovinu řešení se uvažuje nekonečně velký).

Výhodou použití MKP při řešení úloh pevnostní analýzy oproti ostatním metodám je možnost řešit složité geometrické tvary a staticky neurčité úlohy. Nevýhodou je to, že řešit se dají pouze úlohy přímé.

2.1 Vznik

Vznik metody se váže ke 40. létům 20. století, kdy letečtí inženýři Hrennikoff, McHenry, Newmark a Southwell ukázali, že k vyhovujícímu řešení rozložení napětí v elastickém spojitěm problému se dá dojít náhradou malé části kontinua daným uspořádáním elastických prutů [1]. Velkým posunem v teorii MKP byla práce kolektivu kolem M. J. Turnera, která ukázala, že náhrada vlastností spojitěho a diskrétního systému může proběhnout mnohem efektivněji, pokud uvažujeme, že části kontinua se chovají zjednodušeně [1]. Také se jako první v roce 1956 zabývali dvoudimenzionálními prvky a odvodili matice tuhosti pro prutový prvek, nosníkový prvek, plošný trojúhelníkový a obdélníkový prvek. Položili základ tomu, jak spojovat prvkové matice tuhosti v globální matici tuhosti [2]. Tato práce a také fakt, že v 50. letech došlo k vývoji počítačů, které byly schopny řešit velké soustavy lineárních rovnic, podnítily další rozvoj MKP. Během 60. let se vyvinulo řešení pro osově souměrné skořepiny, tlakové nádoby, trojrozměrné prvky, ale také řešení pro přenos tepla, zahrnutí nelinearity, řešení dynamických analýz a mnoho dalšího [2].

Do vývoje MKP zasáhli i čeští vědci. Na konci 60. let profesori VUT v Brně Zlámal a Ženíšek přispěli ke korektní matematické formulaci základů MKP [3] a dokázali konvergenci MKP (se zmenšující se velikostí prvků se řešení blíží k přesnému).

Relativně novou oblastí aplikace MKP je biomechanika, kde se ale využití stále potýká s problémy nelineárního chování materiálu, geometrických nelinearit atd. [2]

2.2 Odvození základní rovnice MKP

Deformační varianta MKP je odvozena z Lagrangeova variačního principu, který lze slovně vyjádřit následovně: „Ze všech kinematically přípustných stavů pružného tělesa nastává takový, jehož potenciální energie je minimální.“ Tedy realizují se ty posuvy, které udělí tělesu minimální potenciální energii. Vztahem (1) se zavádí potenciál Π , člen W značí energii napjatosti tělesa a P potenciál vnějšího zatížení. Tedy platí:

$$\Pi = W - P \quad (1)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dV \quad (2)$$

$$P = \int_V \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{O} \cdot dV + \int_{\Gamma} \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{p} \cdot dS \quad (3)$$

Veličiny vystupující v těchto vztazích jsou sloupcové matice

\mathbf{u} - posuvů

$\boldsymbol{\varepsilon}$ - přetvoření

$\boldsymbol{\sigma}$ - napětí

\mathbf{O} - objemového zatížení

\mathbf{p} - plošného zatížení

2.2.1 Diskretizace

Vyšetřovaná oblast se nahradí náhradní oblastí, která se skládá z konečného počtu konečných prvků určitého typu, jejichž analýza je poměrně jednoduchá a pro stejný typ prvku stejná [3]. Vytvoření prvků se nazývá buď vytvoření sítě nebo „meshing“. Hovoří se o diskretizaci, protože neznámé posuvy na spojitě oblasti, kterých je nekonečně mnoho, se nahradí neznámými posuvy pouze v určitých bodech, kterých je konečný počet. Graficky si to lze představit tak, že spojitá oblast se nahradí diskrétními body (uzly).

Neznámé funkce posuvů jsou po prvcích aproximovány bázovými funkcemi. To jsou předem známé polynomy daného stupně, které musí zajistit spojitost funkčních hodnot deformačních parametrů na hranicích prvků. Aproximací získáme nezávislý posuv bodu na prutu jako funkci souřadnice tohoto bodu. Bázové funkce se volí tak, aby hodnota této funkce vztahující se k deformačnímu parametru v daném uzlu byla v tomto uzlu 1 a v ostatních uzlech 0. Bázové funkce pro jednotlivé prvky jsou uvedeny níže.

Celková potenciální energie se dá vyjádřit jako

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{F} \quad (4)$$

kde \mathbf{U} je sloupcový vektor neznámých deformačních parametrů v uzlech, \mathbf{K} je celková (globální) matice tuhosti a \mathbf{F} je sloupcový vektor zobecněného zatížení. Potenciální energie má nabývat minima:

$$\frac{d\Pi}{d\mathbf{U}} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{F} = 0 \quad (5)$$

Z rovnice (5) je získána soustava lineárních algebraických rovnic. Jedná se o základní rovnici MKP

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (6)$$

2.3 Prutové prvky

V bakalářské práci se zabývám pouze 2D úlohami, budu tedy uvádět prvky definované pro 2D. Důležité je si uvědomit, že všechny vztahy jsou odvozeny za předpokladu lineární pružnosti, a tedy při hodnocení výsledků je nezbytně nutné zhodnotit, zda jsou tyto předpoklady splněny.

2.3.1 Osově zatížený prvek v 1D

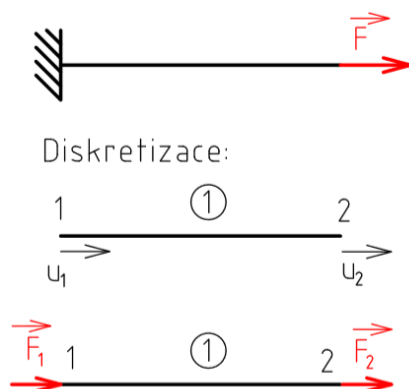
Tento druh prvku uvažuje pouze zatížení v ose prutu, je tedy namáhán pouze tahem/tlakem. V anglické literatuře se označuje pojmem „truss“ (v případě softwaru ANSYS se jedná o prvek nazvaný „LINK“), jednoduchý český ekvivalent neexistuje. V komerčních softwarech ani v navrhovaném softwaru se prvek v 1D nepoužívá, uvádím ho však proto, že se snáze definují potřebné vztahy, které se pro prvek ve 2D pouze rozšiřují. Dvoudimenzionální prvek je rozebrán v kapitole 2.3.2. Tento prvek je použit k pevnostní analýze prutových soustav.

Matice báзовých funkcí je tvaru (7), kde x_1 je souřadnice uzlu 1, x_2 je souřadnice uzlu 2, x je souřadnice bodu, ve kterém chceme posuv vypočítat, a L je délka prvku tzn. $L = x_2 - x_1$. Aproximovaná funkce posuvu je daná rovnicí (8), kde matice \mathbf{U} je $\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2] = \left[\frac{x_2 - x}{L} \quad \frac{x - x_1}{L} \right] \quad (7)$$

$$u(x) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{U} \quad (8)$$

Obr. 1 bude sloužit k odvození matice tuhosti prvku. Prut má délku L , příčný průřez o obsahu S a je vyroben z materiálu s modulem pružnosti v tahu E .



Obr. 1: Osově zatížený prut

Posunutí koncového bodu prutu na obr. 1 je možné vyřešit analyticky pomocí Castiglianovy věty (Maxwell-Mohrova varianta):

$$u = \frac{\partial W}{\partial F} = \sum \frac{N_i \cdot l_i}{E_i \cdot S_i} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial F}$$

$$N = F$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial F} = 1$$

$$u = \frac{F \cdot L}{E \cdot S}$$
(9)

Prvním krokem řešení této úlohy pomocí MKP je diskretizace prutu. To se může provést například jedním prvkem se dvěma uzly (viz obr. 1). Poté základní rovnice MKP je tvaru

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$
(10)

Je potřeba určit koeficienty matice tuhosti. Odvození matice tuhosti je převzato ze [4]. Energie napjatosti prvku se vyjádří jako

$$W_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \sigma \varepsilon S dx$$
(11)

kde x_1 je souřadnice uzlu 1, x_2 je souřadnice uzlu 2, σ je napětí v prvku, ε je přetvoření prvku (oboje je v tomto případě po prvcích konstantní při řešení pomocí MKP). Přetvoření a napětí se získá pomocí vztahů (12) a (13).

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN}{dx} \cdot U = B \cdot U$$
(12)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot B \cdot U = U^T \cdot B^T \cdot E$$
(13)

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$
(14)

Dosazením těchto vztahů do (11) se dostane vztah (15), který se upraví na tvar (16).

$$W_1 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot E \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \cdot S \, dx \quad (15)$$

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} ES \mathbf{U}^T \int_{x_1}^{x_2} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B} \, dx \cdot \mathbf{U} \\ W_1 &= \frac{1}{2} ES \mathbf{U}^T \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} \frac{1}{L^2} & -\frac{1}{L^2} \\ -\frac{1}{L^2} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} dx \cdot \mathbf{U} \\ W_1 &= \frac{1}{2} ES \mathbf{U}^T \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{U} \\ W_1 &= \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} \end{aligned} \quad (16)$$

kde \mathbf{k} je matice tuhosti prvku namáhaného na tah/tlak.

$$\mathbf{k} = \frac{E \cdot S}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (17)$$

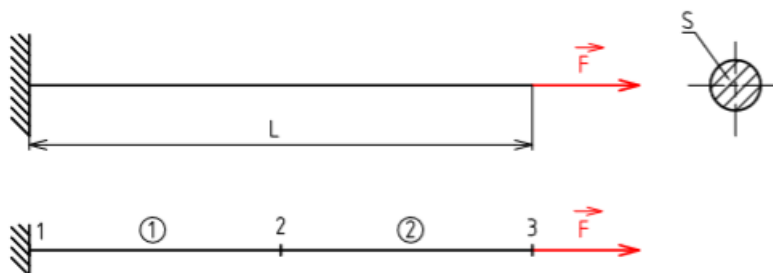
Porovnáním s analytickým řešením si lze všimnout, že v matici tuhosti vystupuje úplně stejný vztah pro tuhost prutu jako při řešení Castiglianovou větou.

Vyřešením rovnice (6), kam se za matici tuhosti dosadí výraz (17) a do matice zobecněného zatížení působící síly, se po aplikaci okrajových podmínek (viz příklad 1.) získá matice \mathbf{U} neznámých posuvů v uzlech. Pomocí rovnice (8) je aproximován posuv nad prvkem jako funkce souřadnice bodu na prvkem.

Ze známých posuvů je možné dále počítat přetvoření a napětí. Při řešení pomocí MKP se posuv nad prvkem mění lineárně, přetvoření a napětí je nad prvkem konstantní, tedy pokud prut rozdělíme na dva prvky, v prostředním uzlu může být v průběhu těchto dvou veličin nespojitost. Vztahy pro přetvoření a napětí jsou uvedeny v (12) a (13).

Příklad 1.

Prut má délku $L = 400 \, mm$, příčný průřez o obsahu $S = 400 \, mm^2$ a je vyroben z materiálu s modulem pružnosti $E = 210 \, GPa$. Je zatížen silou $F = 5000 \, N$.



Obr. 2: Příklad 1

Pro demonstraci rozdělím prut na dva prvky, i když to v případě namáhání na tah není nutné. Pro pruty namáhané v ose postačuje diskretizace pouze jedním prvkem. Po diskretizace uvedené na obr. 2 má každý z prvků $L_p = 200 \text{ mm}$, $S = 400 \text{ mm}^2$ a $E = 210 \text{ GPa}$.

Matice tuhosti prvků jsou

$$\mathbf{k}_1 = \frac{E \cdot S}{L_p} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\mathbf{k}_2 = \frac{E \cdot S}{L_p} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Matice tuhosti prvku \mathbf{k}_1 souvisí s uzly 1 a 2, matice tuhosti prvku \mathbf{k}_2 s uzly 2 a 3. To je důležité při tvorbě globální matice tuhosti, na příslušná místa se musí dosadit odpovídající hodnoty. Globální matice tuhosti je tedy

$$\mathbf{K} = \frac{E \cdot S}{L_p} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{E \cdot S}{L_p} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Dostávám základní rovnici MKP ve tvaru

$$\frac{E \cdot S}{L_p} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

kde F_1, F_2, F_3 jsou vnější síly působící v daných uzlech. Síla F_1 je tedy síla reakce ve vetknutí, v uzlu 2 žádná vnější síla nepůsobí ($F_2 = 0$) a v uzlu 3 působí zadaná vnější síla ($F_3 = F$). Pokud bych se teď snažila tuto soustavu rovnic vyřešit, zjistila bych, že matice soustavy \mathbf{K} je singulární (determinant \mathbf{K} je nulový) a soustava tedy nemá jednoznačné řešení. Proto je dalším nutným krokem aplikace okrajových podmínek. Ze zadání vyplývá, že $u_1 = 0$. K řešení tedy není potřeba první řádek a první sloupec matice tuhosti, tím pádem z řešení odpadá nutnost hledat neznámou reakci ve vetknutí, k řešení není nutno ji znát. Řeším soustavu rovnic (22), jejím řešením dostanu neznámé posuvy v uzlech 2 a 3 (23).

$$\frac{E \cdot S}{L_p} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \frac{L_p}{E \cdot S} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{F \cdot L_p}{E \cdot S} = 0,012 \text{ mm} \quad (23)$$

$$u_3 = \frac{2 \cdot F \cdot L_p}{E \cdot S} = 0,024 \text{ mm}$$

Nad prvkem 1 určím aproximovaný posuv a napětí. Prut je orientovaný tak, že jeho osa leží v ose x a uzel 1 leží v počátku soustavy souřadnic.

$$u(x) = \frac{x_2 - x}{L} \cdot u_1 + \frac{x - x_1}{L} \cdot u_2 = \frac{x}{L} \cdot u_2$$

$$\sigma = E \cdot \left(-\frac{1}{L} \cdot u_1 + \frac{1}{L} \cdot u_2 \right) = \frac{E}{L} \cdot u_2$$
(24)

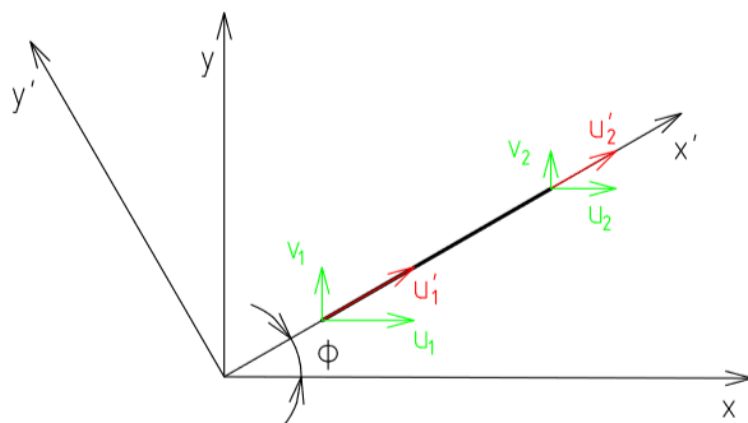
A nad prvkem 2:

$$u(x) = \frac{x_3 - x}{L} \cdot u_2 + \frac{x - x_2}{L} \cdot u_3 = \frac{L_c - x}{L} \cdot u_2 + \frac{x - L}{L} \cdot u_3$$

$$\sigma = E \cdot \left(-\frac{1}{L} \cdot u_2 + \frac{1}{L} \cdot u_3 \right) = \frac{E}{L} \cdot (u_3 - u_2)$$
(25)

2.3.2 Osově zatížený prvek ve 2D

Výše uvedené vztahy a nastíněný postup řešení platí pouze v případě, že osa prutu je totožná s globální osou x. To tak samozřejmě být nemusí, prut může být umístěn v rovině xy jakkoliv, například jako na obr. 3. Uzly už nemají jako neznámý deformační parametr posuv v ose prutu, jak tomu bylo v předchozím případě (na obr. 3 vyznačen červeně), ale mají dva neznámé parametry – posuv v globální ose x a globální ose y (vyznačeny zeleně). To znamená, že matice tuhosti prvku se rozšíří na 4×4 . Důležitým údajem je úhel ϕ , který svírá osa prutu s kladnou poloosou globální osy x.



Obr. 3: Osově zatížený prvek v lokálním souřadném systému

Pro posuvy v lokálním souřadném systému (takový souřadný systém, že osa x' leží v ose prutu) platí vztah (26), kde \mathbf{T} je transformační matice, která se liší podle typu prvku. Pro prvek zatížený v ose je transformace posuvů uvedena v rovnici (27), kde $C = \cos(\phi)$ a $S = \sin(\phi)$.

$$\mathbf{U}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{U}$$
(26)

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ u'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Rovnice (27) reflektuje to, že prut zatížený v ose má tuhost definovanou pouze vůči posuvům v jeho ose, posuvy kolmo na osu jsou proto nulové. Tato forma je tedy díky tomuto zjednodušená. Celá transformace by měla proběhnout dle (28).

$$\begin{bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Stejně tak se vnější síly z globálního souřadného systému dají převést do lokálního

$$\mathbf{F}' = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \quad (29)$$

Matice tuhosti prvku je v lokálním souřadném systému v zjednodušené formě stejná jako v předchozí kapitole, při uvažování možných posuvů kolmo na osu je následující:

$$\mathbf{k}' = \frac{ES}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Pokud je však prut v rovině xy nějak natočen (neleží v globální ose x), musí se úloha vyřešit v globálním souřadném systému. Proto je nutné i matici tuhosti prvku převést z lokálního systému do globálního. V lokálním souřadném systému platí

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{U}' = \mathbf{F}' \quad (31)$$

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{F}$$

Pro převod do globálního systému se rovnice upraví tak, aby se na pravé straně osamostatnila matice vnějšího zatížení. Toho se docílí tak, že se obě strany rovnice zleva vynásobí inverzní maticí k matici \mathbf{T} . Protože je matice \mathbf{T} diagonální (viz upravený vztah (32), kde je to ukázáno), je inverzní matice shodná s maticí transponovanou.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & S \\ 0 & 0 & -S & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{bmatrix} \quad (32)$$

Poté platí

$$\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k}' \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{F} \quad (33)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (34)$$

kde \mathbf{k} je globální matice tuhosti prvku a obecně pro ni platí vztah (35). Vztahem (36) je uvedena glob. matice tuhosti prvku zatíženého v ose.

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{k}' \cdot \mathbf{T} \quad (35)$$

$$\mathbf{k} = \frac{ES}{L} \cdot \begin{bmatrix} C^2 & C \cdot S & -C^2 & -C \cdot S \\ C \cdot S & S^2 & -C \cdot S & -S^2 \\ -C^2 & -C \cdot S & C^2 & C \cdot S \\ -C \cdot S & -S^2 & C \cdot S & S^2 \end{bmatrix} \quad (36)$$

Posuv po prvku se bude aproximovat podle (37). Přetvoření a napětí se spočítají z posuvů v lokálním souřadném systému – viz (38) a (39).

$$u(x) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{U} \quad (37)$$

$$\varepsilon = \mathbf{B} \cdot \mathbf{U}' = \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{U} \quad (38)$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{U} \quad (39)$$

2.3.3 Nosníkový prvek

Tento prvek se v teorii označuje anglickým „beam“, ovšem toto označení se v praxi často používá pro rámový prvek (viz další kapitola). Například v softwaru ANSYS pod označením „BEAM“ uživatel najde právě rámový prvek.

V každém uzlu je možný posuv v ose y (průhyb) a rotace kolem osy z (natočení). Prvek je namáhán pouze na ohyb, v uzlech musí splňovat spojitost průhybů i natočení střednice. Matice tuhosti prvku je uvedena v rovnici (40), kde E je modul pružnosti v tahu, J kvadratický moment příčného průřezu a L je délka prvku. Odvození je uvedeno v [5].

$$\mathbf{k} = \frac{E \cdot J}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

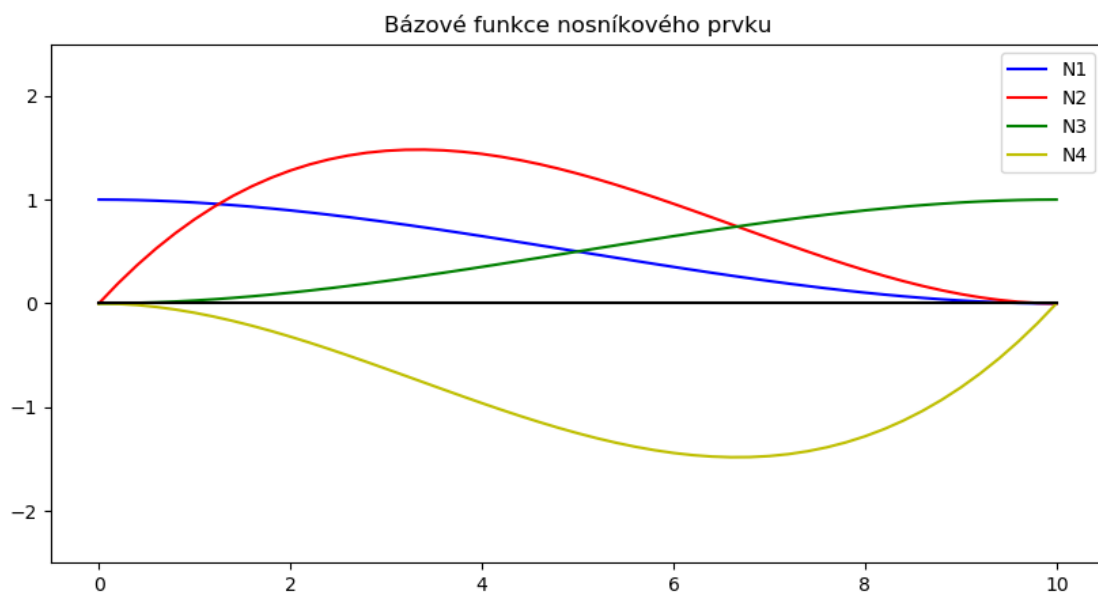
Rovnice (6) je pak v rozepsaném tvaru

$$\frac{E \cdot J}{L^3} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1y} \\ m_1 \\ f_{2y} \\ m_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

kde f_{iy} je síla působící v ose y v i -tém uzlu a m_i je moment působící v i -tém uzlu.

Nezávislý posuv, který se aproximuje, je průhyb. Tvar báзовých funkcí je uveden v rovnicích (42), kde x je osová vzdálenost bodu od prvního uzlu prvku. Pro lepší představu jsou funkce vykresleny v obr. 4 pro prvek o délce $L = 10mm$. Funkce vychází z kubického polynomu, protože kubický polynom je přesným řešením ohybové čáry prutu stálé tuhosti ($EJ = konst$) zatíženého pouze na koncích silami nebo momenty [5].

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{L^3} \cdot (2x^3 - 3x^2L + L^3) & N_2 &= \frac{1}{L^3} \cdot (x^3L - 2x^2L^2 + xL^3) \\ N_3 &= \frac{1}{L^3} \cdot (-2x^3 + 3x^2L) & N_4 &= \frac{1}{L^3} \cdot (x^3L - x^2L^2) \end{aligned} \quad (42)$$



Obr. 4: Bázové funkce nosníkového prvku

Aproximace průhybu je tedy

$$v(x) = \mathbf{N} \cdot \mathbf{U}$$

$$v(x) = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Aproximace se ale může provést i s bázovými funkcemi vyšších řádů [5]. Například pokud je nutné zajistit na hranicích prvků hladkost ohybových momentů (tedy ve druhé derivaci průhybu), každému uzlu se předepíše 3 deformační parametry – průhyb, natočení a ohybový moment – a k aproximaci průhybu se použije polynom 5. stupně. Postup řešení zůstává stejný, pouze se zvětší rozměr matic. Pro spojitě řešení v posouvající síle (třetí derivace průhybu) se každému uzlu ještě navíc předepíše tento deformační parametr a bázové funkce budou polynomy 7. řádu.

Pro výpočet napětí je nutné znát několik dalších vztahů z teorie pružnosti a pevnosti, konkrétně pro přetvoření a křivost průhybové čáry, kde y je vzdálenost bodu na příčném průřezu od neutrálné osy:

$$\varphi = \frac{dv}{dx}, \quad u = -y \frac{dv}{dx}, \quad \varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -y \frac{d^2v}{dx^2}, \quad \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{E \cdot J} \quad (44)$$

Potom napětí po příčném průřezu a střednici je

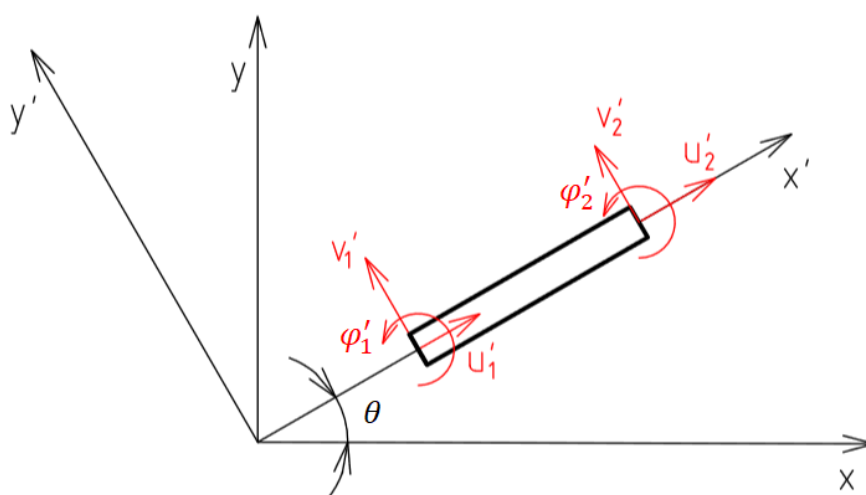
$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = -\frac{y M}{J} = -E \cdot y \frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\sigma_x = -E \cdot y \frac{d}{dx^2} (\mathbf{N} \cdot \mathbf{U}) = -E \cdot y \frac{d\mathbf{N}}{dx^2} \cdot \mathbf{U} = -E \cdot y \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{U} \quad (45)$$

Takto definovaný prvek sám o sobě umožňuje pouze řešení průhybu přímých prutů, a proto se v komerčních systémech vyskytuje pouze v kombinaci s osově zatěžovaným prvkem jako tzv. rámový prvek [4].

2.3.4 Rámový prvek

Rámový prvek vznikne spojením prutového prvku namáhaného v ose (dle 2.3.2) a nosníkového prvku (dle 2.3.3). Každý uzel má tedy tři stupně volnosti, jak lze vidět na obr. 5. Protože předpokládáme lineární chování a rámovým prvkem spojujeme oddělené skupiny deformačních a zatěžovacích parametrů, nedojde k vzájemnému ovlivnění těchto dvou prvků a platí tedy princip superpozice (ohybová a tahová složka jsou navzájem nezávislé).



Obr. 5: Rámový prvek v lokálním souřadném systému

Matici tuhosti rámového prvku lze sestavit sloučením příslušných matic tuhosti předchozích prvků. V lokálním souřadném systému se vyjádří rovnicí (47), kde konstanty C_1 a C_2 jsou následující:

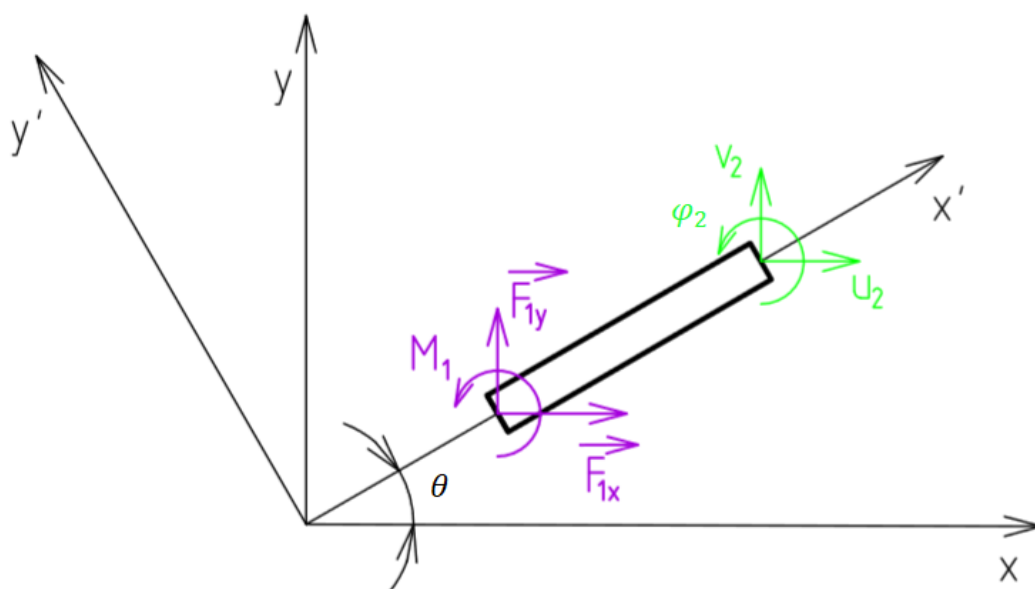
$$C_1 = \frac{ES}{L}, \quad C_2 = \frac{EJ}{L^3} \quad (46)$$

$$k' = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 12C_2 & 6C_2L & 0 & -12C_2 & 6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 4C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2 \\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 12C_2 & -6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 4C_2L^2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Matice tuhosti prvku v globálním souřadném systému se získá pomocí rovnice (35), kam je za transformační matici dosazena rovnice (48), kde $C = \cos(\theta)$ a $S = \sin(\theta)$.

$$T = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Po vytvoření globální matice tuhosti prvku ještě ukáží, jak vypadají matice neznámých deformačních parametrů a matice vnějšího zatížení. Kladné směry zatížení i deformačních parametrů jsou ukázány na obr. 6.



Obr. 6: Kladné směry zatížení a deformačních parametrů rámového prvku

Globální matice deformačních parametrů a zatížení jsou uvedeny v rovnicích (49) a (50). Tyto matice v lokálním souřadném systému budou mít stejné uspořádání, pouze místo například posuvu v globální ose x se na první místo v matici deformačních parametrů dosadí posuv v lokální ose x, což je osa prutu.

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$F = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Protože se tahové a ohybové složky navzájem neovlivňují, aproximují se posuv v ose a průhyb nezávisle na sobě. Nejdříve je však nutné vypočtené deformační parametry převést do lokálního souřadného systému pomocí rovnice (26), kam se za \mathbf{T} dosadí rovnice (48). Posuv v ose prutu se aproximuje pomocí vztahu (8), kam se do matice \mathbf{U} dosadí u'_1 a u'_2 , tedy posuvy v ose prutu. Průhyb se aproximuje pomocí rovnice (43), kam se opět do matice \mathbf{U} dosadí deformační parametry v lokálním souřadném systému, které se spočítaly o krok dříve.

Díky předpokladu linearity lze i tahové a ohybové napětí počítat samostatně. Tahové napětí se spočítá podle vztahu (13), kam se dosadí do \mathbf{U} lokální posuvy u'_1 a u'_2 . Ohybové napětí se určí ze vztahu (45), kam se opět do matice \mathbf{U} dosadí deformační parametry v lokálním souřadném systému. Tyto dvě napětí se spolu sečtou a tak se získá celkové napětí.

3 TVORBA SOFTWARE

Cílem bakalářské práce je vytvořit software, který pomocí MKP vypočítá posuvy a napětí obecného zadání prutových prvků a zatížení a následně výsledky zobrazí. Úloha je omezená pro 2D.

Software je vytvořen v programovacím jazyku Python. Python je hojně využívaný jazyk díky své jednoduchosti, přehlednosti a velkému množství knihoven, kterými se dají funkce Pythonu ještě rozšířit. Navíc je Python volně dostupný a je použitelný i pro komerční účely. Je také rozšiřitelný pomocí jazyků C a C++, čehož je využito právě při tvorbě velké části knihoven, které pak pracují rychleji. Počátky tohoto programovacího jazyku se datují do let 1989-1991 a jeho autorem je Guido van Rossum, který Python pojmenoval podle britské komediální série ze 70. let Monty Pythonův létající cirkus. [6]

Protože je syntax Pythonu jednoduchá, často se používá pro výuku programování a je tedy možno najít řadu kurzů a tutoriálů například [7]. Tento kurz zaštiťuje Massachusettský technologický institut (MIT) a navazují na něj pokročilejší kurzy, obnovuje se každé tři až čtyři měsíce. V práci je použita knihovna NumPy [8], z které jsem využívala goniometrické funkce a nástroje pro práci s maticemi, ale mimo to obsahuje ještě nástroje pro integraci s C/C++ a Fortran, Fourierovy transformace, generátor náhodných čísel atd. Pro vykreslování je použita knihovna Matplotlib [9], která je určena primárně pro 2D (bodové grafy, spojnicové grafy, histogramy, ...), ale má i modul pro vykreslení ve 3D. Obě knihovny jsou součástí většího balíčku SciPy [10], který byl vytvořen pro vědecké účely.

Celá práce je vytvořena jako knihovna, což znamená, že uživatel nemusí zasahovat do skriptů a sledovat konstrukci softwaru. Pro práci s knihovnou viz [11, 12].

3.1 Práce uživatele se softwarem

Pro nainstalování knihovny se softwarem v příkazovém řádku proved'te příkaz

pip install -e .

(nutné udělat pouze jednou před prvním použitím). Aby tento příkaz fungoval, musí být konzole ve stejném adresáři jako *setup.py* a konzole by měla být spuštěná s právy správce. Následně v prostředí Pythonu (Spyder, PyCharm, Jupyter – po nainportování ještě zadejte příkaz *%matplotlib inline*) nainportujte knihovnu příkazem

import mkp

Toto je nutné udělat při každém spuštění daného prostředí. Takto nainportovaná knihovna je připravena k používání.

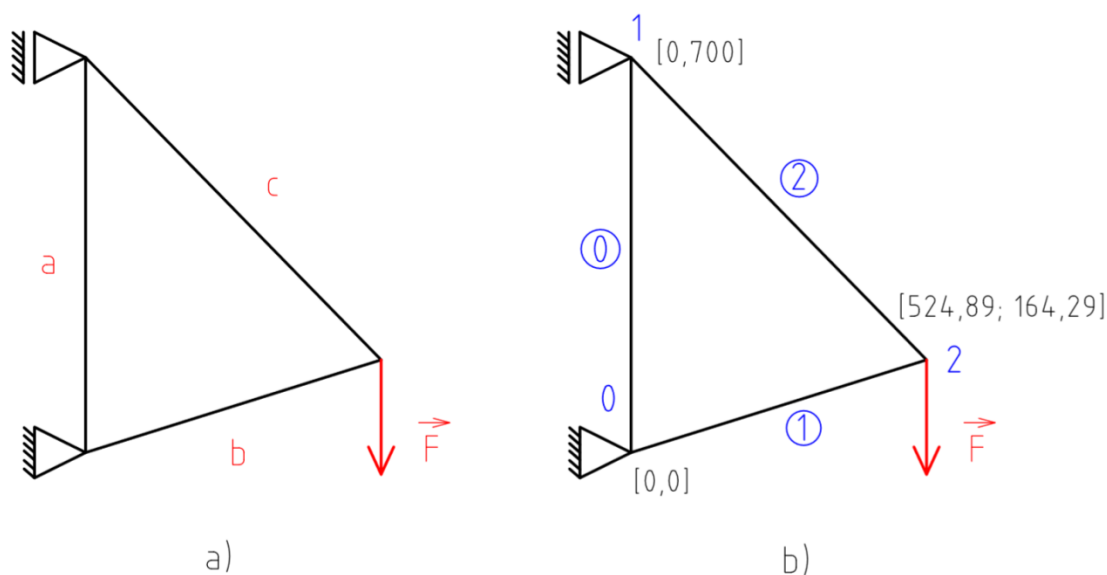
Ve vybraném prostředí Pythonu zadejte podle pokynů níže potřebné veličiny a následně zadejte příkaz podle typu počítané úlohy. Software pracuje se třemi typy úloh, a to výpočet pro truss prvek, pro beam prvek a nakonec pro rámový prvek. Výpočet pro tah odpovídá popsané teorii v odstavci 2.3.2, ohyb je řešen pomocí

nosníkového prvku uvedeném v odstavci 2.3.3 a rám je řešen kombinací těchto dvou podle 2.3.4. Řešení úlohy se uloží do matice \mathbf{U} a výsledky se vykreslí.

Všechny úlohy se dají řešit jako rám, pokud není jednoznačné, že pruty v úloze jsou namáhány pouze tahem nebo ohybem. Avšak obzvlášť v případech, že uživatel ví, že pruty budou namáhané primárně v ose (například se jedná o prutovou soustavu), je vhodnější k výpočtu použít modul tah. Toto řešení pomocí tahu (konkrétně zpracování výsledků – vykreslení posuvů a napětí) je jednodušší než řešení použitím rámu.

3.1.1 Zadání úlohy

Pro všechny typy úloh je nutné zadat několik polí údajů. Vysvětlím to na jednoduchém příkladu na tah/tlak. Úloha je zadána na obr. 7a, vlastnosti jednotlivých prutů jsou: $L_a = 700 \text{ mm}$, $L_b = 550 \text{ mm}$, $L_c = 750 \text{ mm}$, $S_a = 500 \text{ mm}^2$, $S_b = 300 \text{ mm}^2$ a $S_c = 400 \text{ mm}^2$. Pruty jsou vyrobeny z materiálu o modulu pružnosti $E = 210 \text{ GPa}$, zátěžná síla je $F = 350 \text{ N}$. Na obr. 7b už je provedena diskretizace, jsou očíslovány uzly i prvky. Je však nutné vědět, že Python čísluje od nuly, tedy uzly nejsou první, druhý a třetí, ale nultý, první a druhý, stejně tak prvky. Další důležitou informací je, že se do softwaru zadávají souřadnice uzlů, nikoli délky prutů, je tedy potřeba model umístit do zvoleného souřadnicového systému a dopočítat je. Souřadnice uzlů jsou pro přehlednost vepsány do obr. 7b.



Obr. 7: a) zadání úlohy, b) diskretizace úlohy

Na obr. 8 je zadání této úlohy v prostředí Spyderu. Takto jsou správně zadány potřebné veličiny k výpočtu dané úlohy. Vysvětlení způsobu zadávání je hned níže.

Prvním zadávaným polem je pole uzlů. Software pracuje s kompatibilními jednotkami mm, N a MPa, je tedy důležité zadávat souřadnice uzlů tak, aby mezi uzly byly zachovány vzdálenosti v mm. Pole uzlů bude vypadat následovně:

```
uzly = [[0,0], [0,700], [524.8906592,164.2857143]]
```

```

import mkp

#jednoduchy priklad na tah/tlak
uzly = [[0,0], [0,700], [524.8906592,164.2857143]]
prvky = [[0,1, {'E': 200000, 'S': 500}], \
          [0,2, {'E': 200000, 'S': 300}], \
          [1,2, {'E': 200000, 'S': 400}]]
okraj_podm = [[0,0,0], [0,1,0], [1,0,0]]
sily = [[2, [0,-350]]]

U = mkp.tah(uzly, prvky, okraj_podm, sily)

```

Obr. 8: Zadání úlohy v prostředí Spyderu

Dalším polem jsou prvky. Každý prvek se zadá trojicí údajů. Prvními dvěma jsou čísla uzlů, mezi kterými je prvek definován. Je důležité mít stále na paměti, že Python čísluje od nuly. Třetím údajem jsou vlastnosti prvku zadané pomocí slovníku. Potřebné vlastnosti k výpočtu se liší dle typu úlohy, pro tah se zadává modul pružnosti a plocha příčného průřezu, pro ohyb modul pružnosti, kvadratický moment průřezu a vzdálenosti krajních vláken od neutrálné osy y_{max} (vzdálenost ve směru kladné poloosy y) a y_{min} (vzdálenost ve směru záporné poloosy y). Tento způsob zadávání zajišťuje, že je software schopen řešit všechny typy příčných průřezů. Pro rámový prvek se zadávají všechny zmíněné údaje. Do výpočtu samozřejmě vchází i délka prvku, ale tu si software dopočítá sám jako vzdálenost zadaných uzlů. Pro tento příklad tedy je:

```

prvky = [[0,1, {'E': 200000, 'S': 500}],
          [0,2, {'E': 200000, 'S': 300}],
          [1,2, {'E': 200000, 'S': 400}]]

```

Jako další je potřeba zadat okrajové podmínky. Ty se zadávají celkem třemi údaji. Prvním je číslo uzlu, kde chceme podmínku zadat, druhé číslo udává deformační parametr, který chceme omezit – 0 značí posuv v globální ose x , 1 posuv v ose y a 2 natočení kolem osy z . Při úloze na tah se nemusí vůbec zamezovat natočení, neboť pro tento prvek ani není definováno, stejně tak pro výpočet čistě ohýbaného prutu není nutné zamezovat posuv v ose x , protože také není definován. Třetí údaj je hodnota podmínky – nula pro zamezení deformačního parametru. Pro tento příklad tedy

```

okraj_podm = [[0,0,0], [0,1,0], [1,0,0]]

```

Jako další se definují působící síly. Každá síla se zadává dvěma údaji. První je číslo uzlu, ve kterém síla působí a druhý je vektor – složka síly v x a y .

```

sily = [[2, [0,-350]]]

```

Pro jiné úlohy než zatížení tahem se ještě definují působící momenty. Moment se zadává dvěma veličinami. První je opět číslo uzlu, ve kterém působí a druhá je velikost momentu (kladná, pokud je moment ve směru osy z (tedy točí proti směru hodinových ručiček), záporná pokud proti směru). V tomto případě ale moment

definovat smysl nemá, potom už by se nejednalo o namáhání v ose. Avšak pro ostatní typy úloh se definovat musí, i když bude pole prázdné. Stejně tak pokud je prut zatížen pouze momentem, musí se nadefinovat prázdné pole sil.

Následuje nainportování knihovny a zavolání funkce k výpočtu. Funkce se volá podle typu úlohy, tedy jednou z níže uvedených možností. Poslední položkou ve volání funkce je hodnota, kterou se mají při vykreslování naškálovat posuvy. Tato položka je nepovinná, pokud ji uživatel nezadá, software násobek určí tak, aby maximální vykreslený posuv odpovídal patnáctině největšího rozměru zadané soustavy z prutů. Pokud uživatel zadá 1, vykreslí se posuvy ve skutečném měřítku.

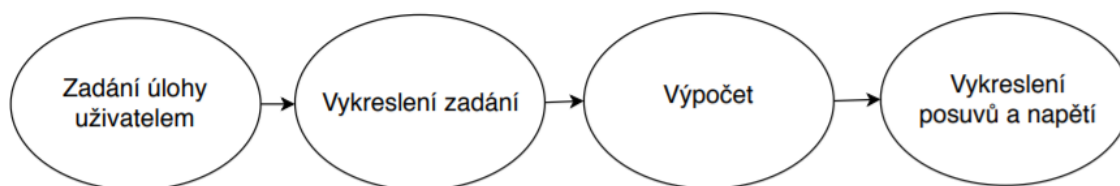
```
U = mkp.tah(uzly, prvky, okraj_podm, sily)
U = mkp.ohyb(uzly, prvky, okraj_podm, sily, momenty,1)
U = mkp.ram(uzly, prvky, okraj_podm, sily, momenty,20)
```

3.2 Jak software pracuje a jeho výstup

3.2.1 Postup softwaru

Obecný postup výpočtu je uvedený ve vývojovém diagramu na obr. 9. Až po zpracování vypočtených deformačních parametrů je postup výpočtu pro všechny tři případy stejný, rozchází se až v době, kdy software vykresluje aproximované posuvy a vypočtené napětí. Postup pro tah je nejsnazší. Je to proto, že posuvy se po prvku mění lineárně, a tedy je vždy největší hodnota posuvu v uzlu. To usnadňuje naprogramování v tom, že násobek pro naškálování posuvů pro vykreslení (největší vykreslený posuv odpovídá patnáctině největšího rozměru soustavy) se může určit z hodnot posuvů v uzlech a při následné aproximaci se rovnou při počítání posuvu v místě na prutu určí nová souřadnice tohoto bodu.

Při ohybu se ale může stát, že největší průhyb nebude v uzlu, ale v nějakém místě na prutu. Tedy nejdříve je nutné vypočítat všechny aproximované průhyby potřebné k vykreslení a poté teprve dopočítávat nové souřadnice deformovaných bodů prvku, ale aspoň jsou předem známy souřadnice x (ty se deformací nezmění). Stejně tak je tomu u rámového prvku, který je nejsložitější. Tady už však nejsou předem známy ani x , ani y souřadnice vykreslovaného deformovaného tvaru.

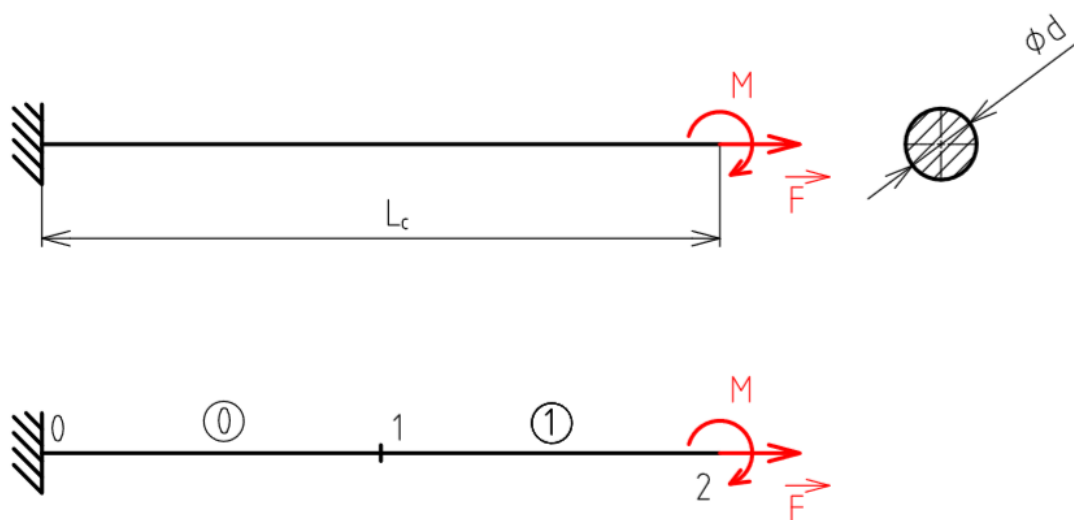


Obr. 9: Postup softwaru

Postup softwaru detailněji projdu na jednoduchém příkladu s použitím rámových prvků. Tento konkrétní příklad jsem zvolila proto, že použití rámových prvků je

nejkomplikovanější, ale zároveň jdou výsledky ověřit jednoduchým analytickým výpočtem.

Příklad 2. Mějme prut na jednom konci vetknutý a na druhém zatížený silou a momentem podle obr. 10. Prut má délku $L_c = 1000 \text{ mm}$, průměr $d = 50 \text{ mm}$ a je vyroben z materiálu s modulem pružnosti $E = 210 \text{ GPa}$. Je zatížen silou $F = 50\,000 \text{ N}$ a momentem $M = -350\,000 \text{ Nmm}$. Prut rozdělím na dva prvky, každý o délce $L = 500 \text{ mm}$. Jedná se o rámové prvky (kapitola 2.3.4). Vzhledem k tomu, že Python čísluje od 0, budu se toho v tomto vysvětlení držet i já.



Obr. 10: Příklad 2

Správné zadání pro tento problém je následující:

```
from math import pi
d = 50
J = (pi*d**4)/64
S = (pi*d**2)/4
uzly = [[0, 0], [500, 0], [1000, 0]]
prvky = [[0, 1, {'E': 210000, 'S': S, 'J': J,
               'ymax':d/2, 'ymin':d/2}],
         [1, 2, {'E': 210000, 'S': S, 'J': J,
               'ymax':d/2, 'ymin':d/2}]]
okraj_podm = [[0, 0, 0], [0, 1, 0], [0, 2, 0]]
sily = [[2, [50000, 0]]]
momenty = [[2, -350000]]
```

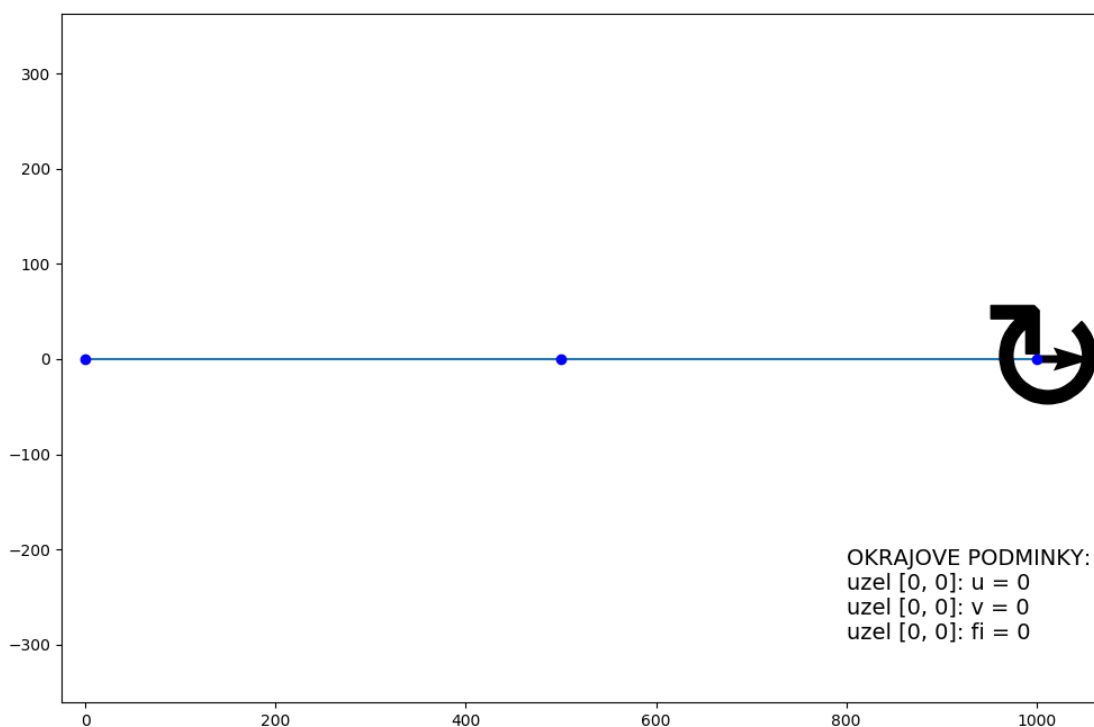
Skript prep.py

Skript obsahuje funkci, která umožňuje vykreslení zadání. Funkce vytvoří pole souřadnic x a pole souřadnic y uzlů a připraví pole úseček pro vykreslení. Dalším

krokem je příprava pro vykreslování sil. To probíhá pomocí funkce knihovny Matplotlib *quiver*. Výhoda této funkce je to, že při zvětšení části obrázku udržuje šipka pořád stejnou velikost, tedy vidíme ji pořád stejně velkou, přizpůsobuje svou velikost oknu. Způsob vykreslování šipek je takový, že je předem určena velikost šipky znázorňující nejmenší a největší sílu a velikost šipek pro ostatní síly je určena pomocí interpolace. Důvodem je to, že pokud by na danou soustavu působily dvě síly a jedna by byla mnohonásobně větší než druhá a vykreslování by probíhalo pouze na základě jejich velikosti, byla by šipka znázorňující větší sílu tak dlouhá, že by se ani nevešla na zobrazenou oblast. Následuje vykreslení šipek momentů. Orientace šipky dodržuje orientaci momentu. Posledním bodem nutným k vykreslení je nachystání popisu k vypsání zadaných okrajových podmínek a pak následuje pokyn k vykreslení.

Dalším úkolem tohoto skriptu mimo vykreslení zadání je přidání délky prvku do jeho vlastností. Délka se vypočítá jako vzdálenost zadaných uzlů.

Výstupem pro tento příklad je obr. 11, který slouží hlavně k tomu, aby si uživatel zkontroloval, že vše zadal správně – správně zadané prvky pomocí uzlů; zda jsou síly a momenty zadány opravdu v uzlech, ve kterých působí a jestli jsou správně předepsané okrajové podmínky.



Obr. 11: Vykreslení zadání – příklad 2

Skript `vypocet_ram.py`

Tento skript obsahuje výpočet uzlových deformačních parametrů, jeho výstupem je matice **U**.

Prvním úkolem této funkce je sestavit celkovou matici tuhosti. Ta bude mít v řešeném příkladu rozměr 9×9 , což se zjistí tak, že se počet uzlů vynásobí počtem deformačních uzlových parametrů, které jsou dva u prvku namáhaného na tah

a nosníkového prvku a tři u rámového prvku. Pro každý prvek se vytvoří prvková matice tuhosti v lokálním souřadném systému dle rovnice (47). Software dále zjistí úhel, který osa prvku svírá s kladnou poloosou globální osy x. To je zajištěno speciální funkcí knihovny NumPy *arctan2*, která zajistí to, že se úhel vždy měří právě od kladné poloosy x. Řešená úloha je triviální, pro oba prvky je tento úhel nulový. Následuje sestavení transformační matice dle (48) a výpočet prvkové matice tuhosti v globálním souřadném systému podle rovnice (35). Řešená úloha je zvláštní případ – protože úhel mezi osou prvku a kladnou poloosou globální osy x je nulový, je transformační matice jednotková, a tedy globální matice tuhosti prvku je úplně stejná jako ta lokální. Dále software postupuje tak, že hodnoty této matice přičte k odpovídajícím hodnotám globální matice tuhosti, která je zpočátku nulová, a až poté se přesune na další prvek v pořadí. Takto postup opakuje až do vyčerpání všech prvků. Postup přiřazování do globální matice tuhosti je na obr. 12.

$$\begin{aligned}
 k_1 = k'_1 &= \begin{bmatrix} \overset{u_0}{C_1} & \overset{v_0}{0} & \overset{\varphi_0}{0} & \overset{u_1}{-C_1} & \overset{v_1}{0} & \overset{\varphi_1}{0} \\ 0 & 12C_2 & 6C_2L & 0 & -12C_2 & 6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 4C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2 \\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 12C_2 & -6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 4C_2L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_{0x} \\ F_{0y} \\ M_0 \\ F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \end{matrix} \\
 k_2 = k'_2 &= \begin{bmatrix} \overset{u_1}{C_1} & \overset{v_1}{0} & \overset{\varphi_1}{0} & \overset{u_2}{-C_1} & \overset{v_2}{0} & \overset{\varphi_2}{0} \\ 0 & 12C_2 & 6C_2L & 0 & -12C_2 & 6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 4C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2 \\ -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 12C_2 & -6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 4C_2L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \end{matrix} \\
 K &= \begin{bmatrix} \overset{u_0}{C_1} & \overset{v_0}{0} & \overset{\varphi_0}{0} & \overset{u_1}{-C_1} & \overset{v_1}{0} & \overset{\varphi_1}{0} & \overset{u_2}{0} & \overset{v_2}{0} & \overset{\varphi_2}{0} \\ 0 & 12C_2 & 6C_2L & 0 & -12C_2 & 6C_2L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6C_2L & 4C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & 0 & 0 & 2C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 24C_2 & 0 & 0 & -12C_2 & 6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & 0 & 8C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 12C_2 & -6C_2L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 4C_2L^2 \end{bmatrix} \begin{matrix} F_{0x} \\ F_{0y} \\ M_0 \\ F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Obr. 12: Tvorba globální matice tuhosti

Tento postup je založen na principu, že každý řádek prvkové matice tuhosti odpovídá jednomu z parametrů matice vnějšího zatížení a každý sloupec souvisí s jedním z deformačních parametrů úlohy. Tyto parametry souvisí s uzly, mezi kterými je prvek definován. Člen matice je tedy určen dvojicí parametrů, které jsou přiřazené řádku

a sloupce, na jejichž průsečíku se prvek nachází. Tento prvek se přičítá na místo v globální matici tuhosti odpovídající stejné dvojici parametrů.

Dalším krokem je vytvoření matice vnějšího zatížení, která bude mít v tomto případě rozměr 9×1 . Zatížení se dosazuje na řádky způsobem uvedeným v následující rovnici. Zároveň je provedeno dosazení pro tento konkrétní příklad. Zatížení v uzlu 0, kde je vetknutí, je obecně neznámé, protože tam působí vazbové reakce. Pro tento příklad by bylo jednoduché je určit z rovnic statické rovnováhy, nicméně jak bude ukázáno níže, k výpočtu to není vůbec potřeba.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{0x} \\ F_{0y} \\ M_0 \\ F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{0x} \\ F_{0y} \\ M_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50\,000 \\ 0 \\ -350\,000 \end{bmatrix} \quad (51)$$

Pokud bych ale reakce ve vetknutí vyřešila a všechny hodnoty ve vektoru vnějšího zatížení by tak byly známé, úlohu bych pomocí rovnice (6) stejně nevyřešila, protože matice \mathbf{K} je singulární (má nulový determinant), a tedy neexistuje jednoznačné řešení soustavy rovnic. Aby toto řešení existovalo, musí se využít okrajových podmínek, a to alespoň takových, aby bylo těleso nepohyblivě uloženo v prostoru. V tomto příkladu jsou vetknutím zamezené všechny deformační parametry v uzlu 0, takže se položí $u_0 = 0$; $v_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$. Aplikace okrajových podmínek znamená odstranění odpovídajících řádků a sloupců, viz obr. 13. Z tohoto obrázku je zřejmé, že pro provedení výpočtu posuvů a napětí pomocí MKP není nutné určovat reakce ve vetknutí, protože ve výpočtu vůbec nevystupují.

$$\begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12C_2 & 6C_2L & 0 & -12C_2 & 6C_2L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6C_2L & 4C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ -C_1 & 0 & 0 & 2C_1 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 \\ 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 24C_2 & 0 & 0 & -12C_2 & 6C_2L \\ 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & 0 & 8C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 2C_2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & -C_1 & 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12C_2 & -6C_2L & 0 & 12C_2 & -6C_2L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6C_2L & 2C_2L^2 & 0 & -6C_2L & 4C_2L^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \varphi_0 \\ u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{0x} \\ F_{0y} \\ M_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 50\,000 \\ 0 \\ -350\,000 \end{bmatrix}$$

Obr. 13: Aplikace okrajových podmínek

Místo soustavy devíti algebraických rovnic se bude řešit soustava pouze šesti rovnic. Řešení je provedeno pomocí vestavěné funkce lineární algebry knihovny NumPy. Posledním krokem je tvorba matice deformačních parametrů dosazením zadaných (okrajové podmínky) a vypočtených deformačních parametrů ve správném pořadí

do matice U . Výstupem této části softwaru je matice uzlových deformačních parametrů U , která má v tomto případě rozměr 9×1 .

Skript `post_ram.py`

V tomto skriptu se provádějí veškeré úkony zpracování výsledků – aproximace průhybů a výpočet napětí a následné vykreslení těchto dvou veličin v deformovaném tvaru.

Každý prvek se rozdělí na předem určený počet menších částí, v softwaru je momentálně nastaveno 20 dílků na prvek. Pro dosažení větší přesnosti je možné tento počet zvýšit, ale tím se samozřejmě zvýší i výpočetní čas. Každému dílku je určitým postupem přiřazena hodnota průhybu a hodnota napětí, podle které je mu přiřazena barva při vykreslování. Jako první se určuje celkové posunutí. Pro každý prvek se nejprve určí krok v ose x a krok v ose y , aby se prvek rozdělil na požadovaný počet dílků. Poté se určí matice globálních uzlových deformačních parametrů prvku, transformační matice a z těchto dvou matic se vypočítá matice lokálních uzlových deformačních parametrů podle vztahu (26). Z lokálních parametrů se určují hodnoty posuvů i napětí. Software pokračuje cyklem, který dvacetkrát určí bod na prvku, pro který se určují hodnoty posuvu. Pro tento bod se pomocí báзовých funkcí aproximuje posuv v ose a posuv kolmo na osu podle rovnic (8) a (43) postupem uvedeným v kapitole 2.3.4 a Pythagorovou větou se určí celková hodnota, která se ukládá do pole, které bude použito pro výběr barvy při vykreslení. Zároveň se tvoří dvě pole, která ukládají souřadnice x a y posunutých bodů prvku.

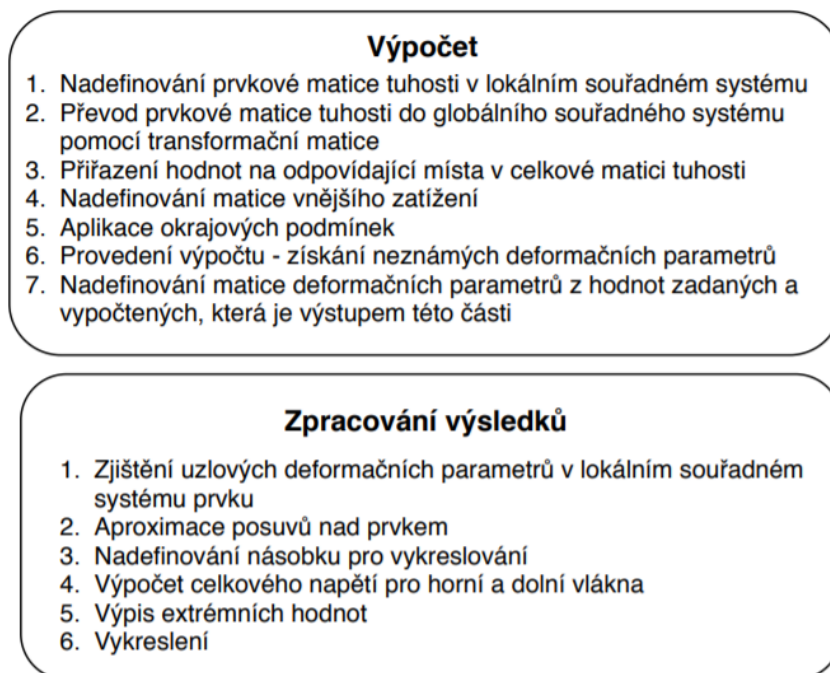
Až tento sled kroků proběhne pro všechny prvky, určí se násobek pro škálování vykreslených posuvů. Ten je buď přímo určen uživatelem v zadání úlohy, nebo je definován softwarem. V tom případě je násobek takový, aby byl největší posuv vykreslený jako patnáctina největšího rozměru modelu. V této úloze bude tedy největší posuv vykreslen zaokrouhleně jako 67 jednotek.

Po určení tohoto násobku se vytvoří pole deformovaných uzlů (s přeškálovanými posuvy) a následně pole úseček původního tvaru (stejně jako se vytvořilo pro vykreslení zadání), které bude reálně použito pro vykreslení, a pole úseček deformovaného tvaru, které je pouze pomocné. Nutným dalším krokem je vytvoření pole úseček, které bude použito pro vykreslení deformovaného tvaru. To musí odpovídat tomu, že každý prvek je rozdělen na 20 menších částí. Tedy těchto úseček v této úloze je 40. Každé z nich se na základě předtím vytvořeného pole hodnot posuvů při vykreslování přiřadí barva.

Následuje výpočet napětí podle rovnic (13) a (45) postupem popsáním v 2.3.4. Stejně jako v předchozím dílčím úkolu se nejprve určí uzlové deformační parametry prvku v lokálním souřadném systému. Tahové napětí je po prvku konstantní, pro výpočet extrémního ohybového napětí software pokračuje cyklem, který dvacetkrát určí bod na prvku, pro něj nadefinuje druhé derivace báзовých funkcí a vypočte napětí v horních a spodních vláknech, které se v případě kruhového průřezu liší pouze znaménkem. Po proběhnutí výpočtu tahového a ohybového napětí pro všechny prvky se tato napětí sečtou a tím se získá celkové napětí.

Dalším krokem v zpracování výsledků je výpis extrémních hodnot – maximální hodnoty posuvu a maximálního a minimálního napětí v horních i spodních vláknech. Jako poslední software vykreslí dva obrázky, prvním je vykreslení hodnot posuvů a druhým vykreslení hodnot napětí do deformovaného tvaru.

Na následujícím obrázku je pro přehlednost uvedeno stručné shrnutí nejdůležitějších bodů postupu softwaru pro část týkající se výpočtu neznámých deformačních parametrů a pro zpracování výsledků. Tento postup platí pro použití rámových prvků, při ostatních typech úloh jsou některé body modifikovány nebo úplně vynechány.



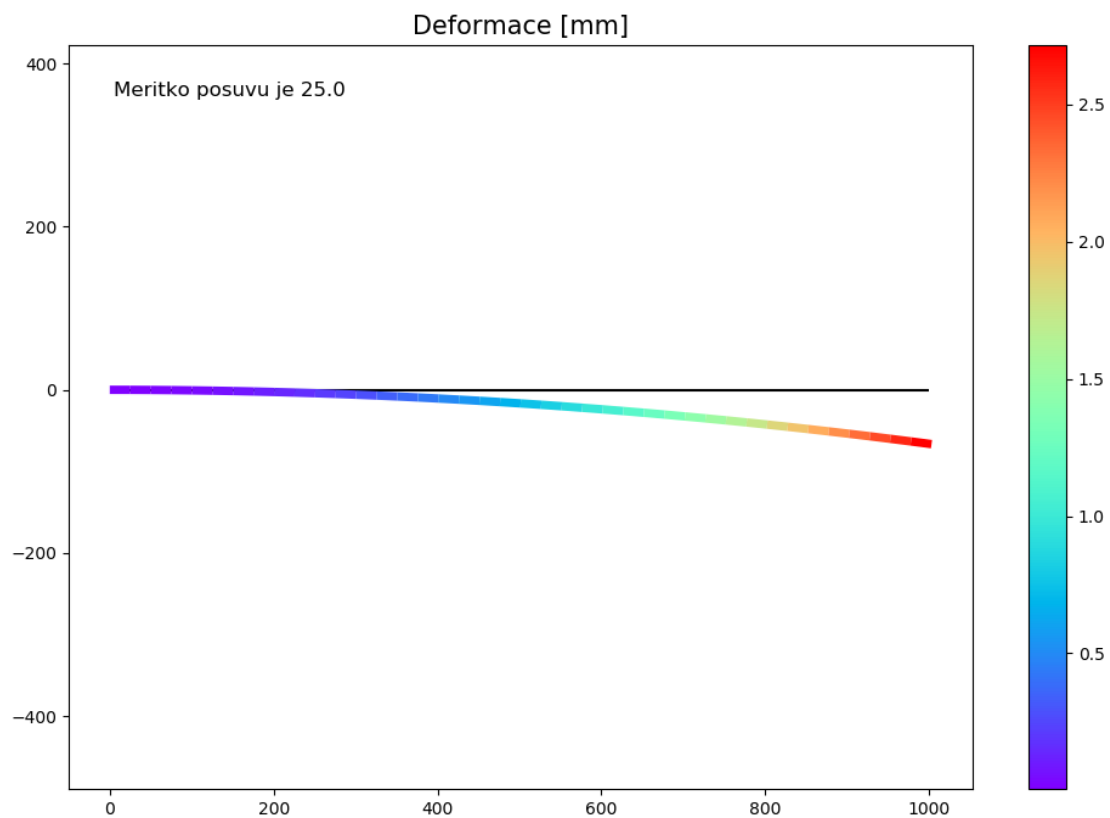
Obr. 14: Shrnutí nejdůležitějších bodů softwaru

3.2.2 Výstup

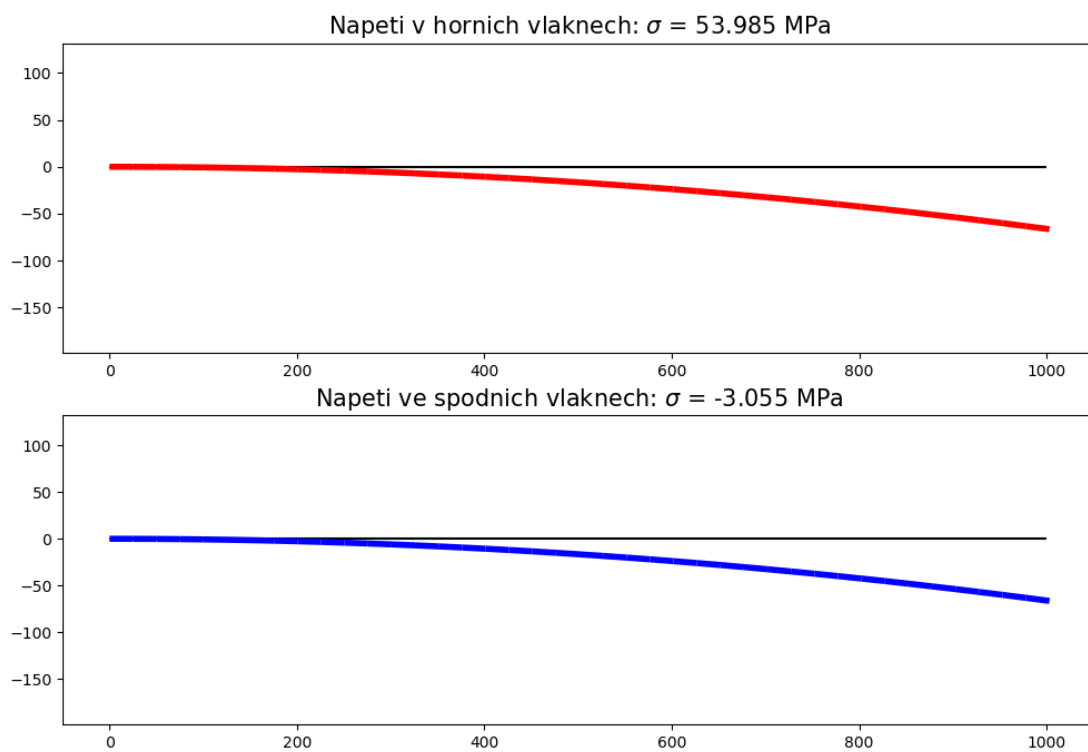
Výstupem softwaru jsou celkem tři obrázky, budou ukázané pro předchozí příklad. Prvním z nich je vykreslení zadání (obr. 11), které bylo ukázané už výše a slouží hlavně uživateli ke kontrole. Dalším výstupem je výpis extrémních hodnot jako na obr. 15. Na závěr se vykreslí posuv a napětí – obr. 16 a 17. Vykreslený deformovaný tvar je na obou obrázcích s násobkem zvětšení 25.

```
Maximalni posuv je 2.7189 mm.
Maximalni napeti v hornich/levych vlaknech je 53.985 MPa.
Minimalni napeti v hornich/levych vlaknech je 53.985 MPa.
Maximalni napeti ve spodnich/pravych vlaknech je -3.056 MPa.
Minimalni napeti ve spodnich/pravych vlaknech je -3.056 MPa.
```

Obr. 15: Výpis extrémních hodnot



Obr. 16: Vykreslení průhybu



Obr. 17: Vykreslení napětí

Výsledky vypočtené softwarem porovnám s výsledky dosaženými analytickým řešením. Protože jsou všechny vztahy odvozeny na předpokladu lineární pružnosti, jsou na sobě tahové a ohybové složky nezávislé. Můžu tedy oddělit řešení ohybu a řešení tahu. Nejdříve vyřeším namáhání v ose. Maximální posuv bude na volném konci prutu a platí pro něj vztah odvozený z Castiglianovy věty:

$$u_x = \frac{F \cdot L_c}{E \cdot S} = \frac{4F \cdot L_c}{E \cdot \pi d^2} = 0,12126 \text{ mm} \quad (52)$$

Tahové napětí je po celé délce prutu konstantní a určí se jako

$$\sigma_{TAH} = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi d^2} = 25,4648 \text{ MPa} \quad (53)$$

Jako další vyřeším ohybové složky. Pro průhyb volného konce vetknutého prutu zatíženého pouze momentem platí

$$v = \frac{M \cdot L^2}{2 \cdot E \cdot J_z} = \frac{M \cdot L_c^2}{2 \cdot E \cdot \frac{\pi \cdot d^4}{64}} = 2,7162 \text{ mm} \quad (54)$$

Hodnota extrémního napětí se vypočte jako

$$\sigma_{ex} = \frac{M_{omax}}{W_o} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot d^3} = 28,5206 \text{ MPa} \quad (55)$$

a je po délce prutu konstantní, mění se jen po průřezu. Horní vlákna jsou tažená, takže v nich bude tahové napětí této velikosti, spodní vlákna jsou naopak tlačena, proto v nich bude tlakové (tedy záporné) napětí.

Celková hodnota posuvu a napětí se zjistí superpozicí předchozích výsledků.

$$u = \sqrt{u_x^2 + v^2} = 2,7189 \text{ mm} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{Hex} &= \sigma_{TAH} + \sigma_{ex} = 53,985 \text{ MPa} \\ \sigma_{Hex} &= \sigma_{TAH} - \sigma_{ex} = -3,056 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (57)$$

Po porovnání získaných hodnot je zřejmé, že se na zobrazovaných desetinných místech vůbec neliší.

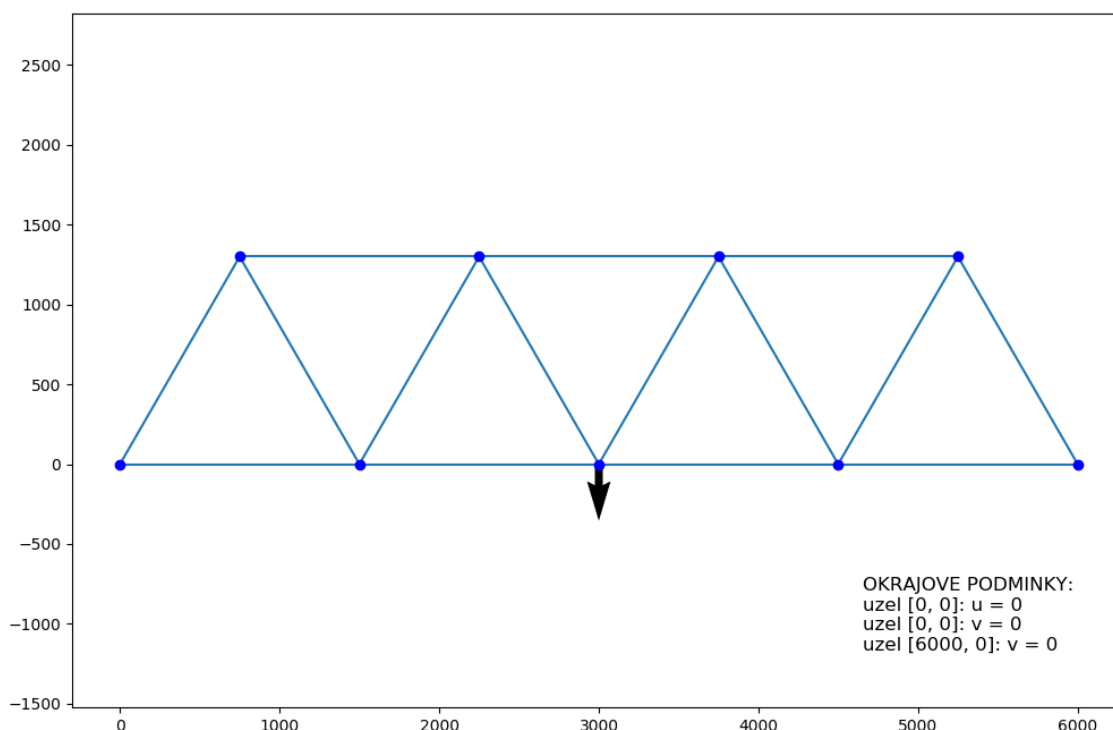
4 ZHODNOCENÍ A DISKUZE

V této části bakalářské práce provedu porovnání výsledků z mnou navrženého softwaru s výsledky z komerčního softwaru ANSYS. ANSYS vznikl v roce 1970 [13] a v dnešní době obsahuje značné množství modulů pro řešení mnoha typů úloh – statickou strukturní analýzu, dynamickou analýzu, řeší rozložení teplot i přenos tepla, problém vlastních frekvencí, optimalizaci, proudění a mnoho dalších. Úlohy pro porovnání výsledků byly vytvořeny v prostředí ANSYS Workbench [14], který pro výpočet používá modul ANSYS Mechanical.

Porovnání provedu vždy na jednom příkladu pro každý typ zpracovaného prvku.

4.1 Porovnání prvku namáhaného v ose

Porovnání provedu na příkladu prutové soustavy. Jedná se o mostní konstrukci složenou z rovnostranných trojúhelníků. Materiál je konstrukční ocel s modulem pružnosti v tahu $E = 200 \text{ GPa}$, příčný průřez je $S = 700 \text{ mm}^2$ a délka každého prutu $L = 1500 \text{ mm}$. Působící síla má velikost $F = 50 \text{ kN}$ a zavazbení k základnímu tělesu je takové, že na jedné straně mostu uvažuji rotační vazbu, na druhé straně je podpora, aby byla umožněna deformace způsobená teplotní roztažností. Zadání vykreslené navrženým softwarem je na obr. 18.

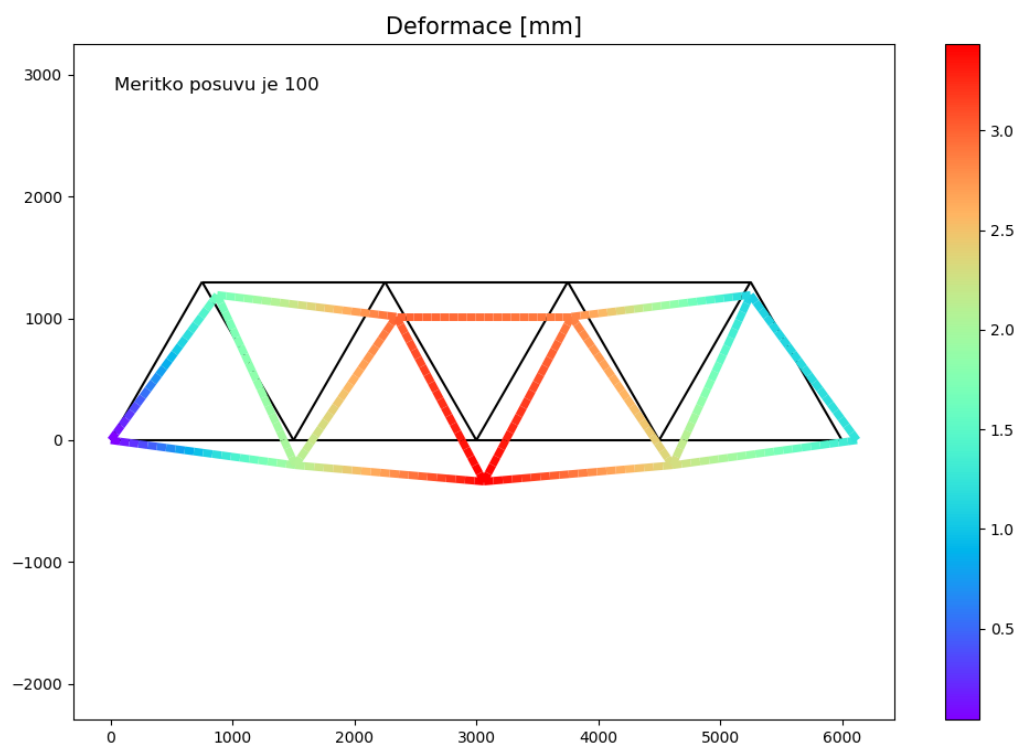


Obr. 18: Mostní konstrukce – zadání

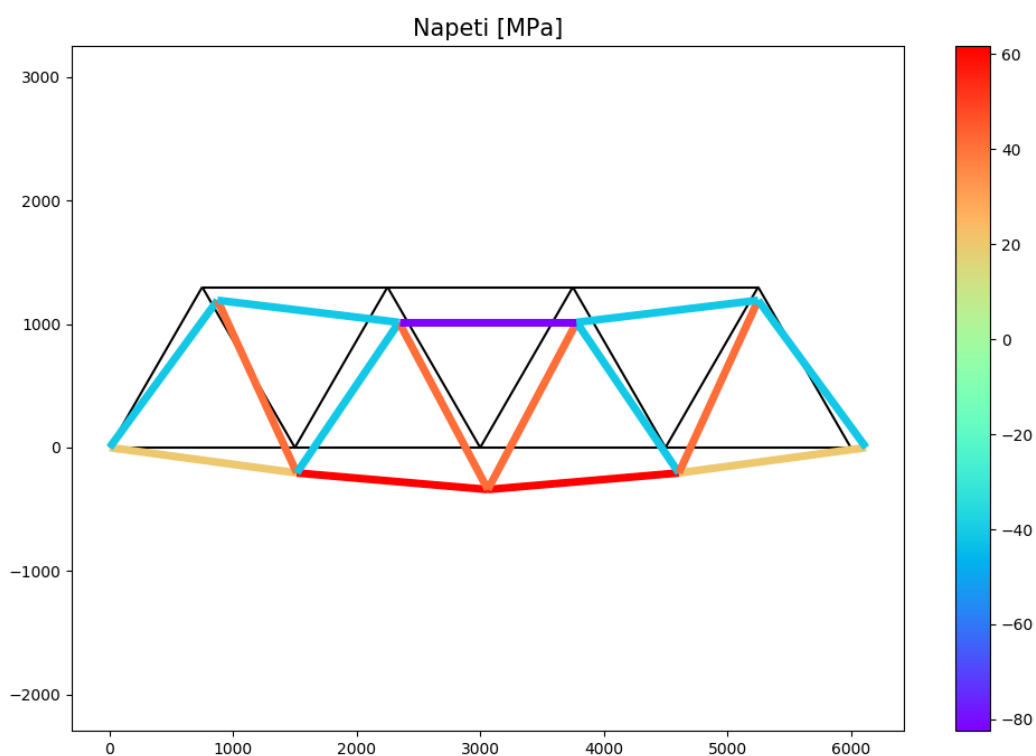
V obr. 19 až 22 je deformovaný tvar vykreslen s násobkem zvětšení 100.

Navržený software

Následující obrázky ukazují deformaci mostu s vykreslením posuvů a napětí.



Obr. 19: Mostní konstrukce – deformace vypočtená navrženým softwarem

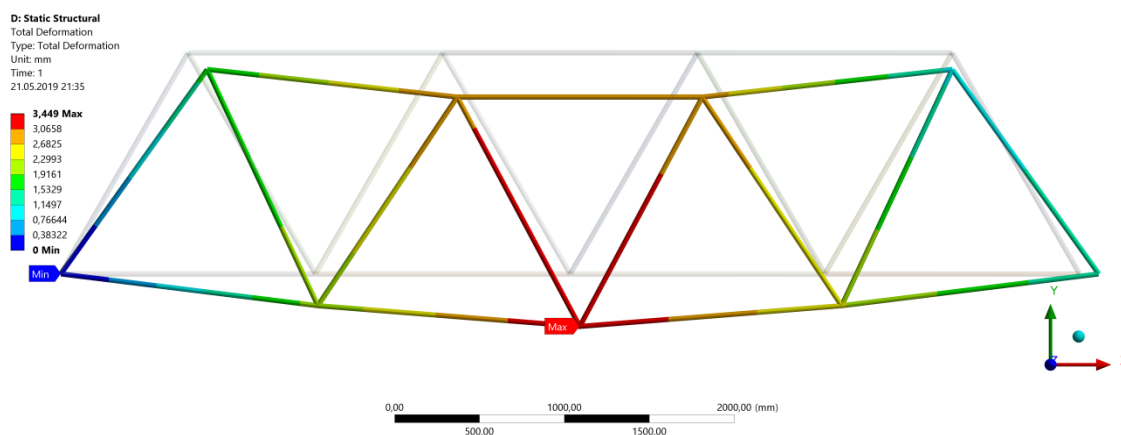


Obr. 20: Mostní konstrukce – napětí vypočtené navrženým softwarem

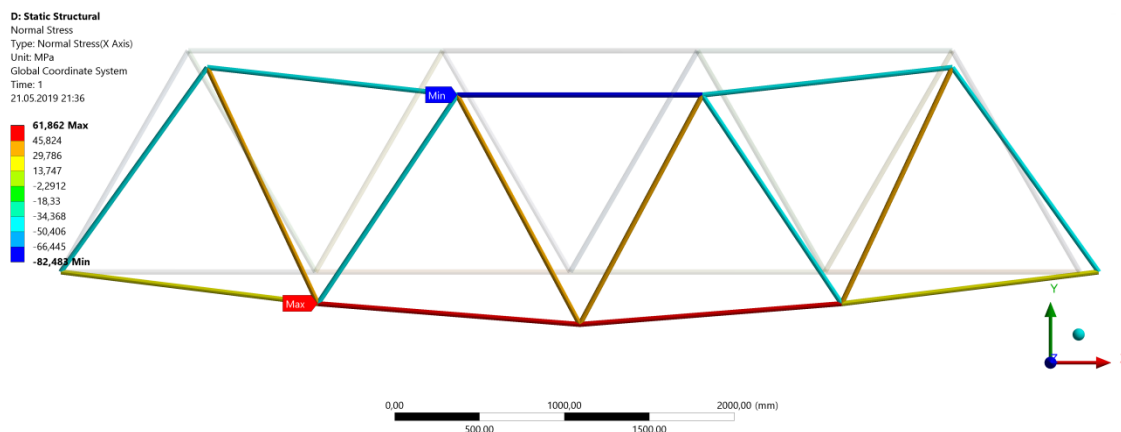
Maximální hodnota posunutí je $3,4377\text{ mm}$, největší tahové napětí $61,859\text{ MPa}$ a maximální tlakové $-82,479\text{ MPa}$.

ANSYS

K výpočtu byl použit prvek LINK180. Síť konečných prvků byla vytvořena tak, aby každému prutu odpovídal jeden prvek. Všem uzlům byl pomocí funkce DISPLACEMENT odebrán posuv v ose z, levému dolnímu uzlu navíc byly odebrány i posuvy v ose x a y. Pravému dolnímu uzlu byl stejnou funkcí odebrán ještě posuv v ose y. Síla byla aplikována do prostředního dolního uzlu.



Obr. 21: Mostní konstrukce – deformace vypočtená komerčním softwarem



Obr. 22: Mostní konstrukce – napětí vypočtené komerčním softwarem

Maximální hodnota posunutí je $3,449\text{ mm}$, největší tahové napětí $61,862\text{ MPa}$ a maximální tlakové $-82,483\text{ MPa}$.

Porovnání

Prvním porovnáním je kontrola deformovaného tvaru. Jak lze vidět porovnáním zobrazeného tvaru z navrženého a komerčního softwaru, vykreslil navržený software deformovaný tvar stejně. Druhým porovnáním je číselné porovnání maximálních hodnot.

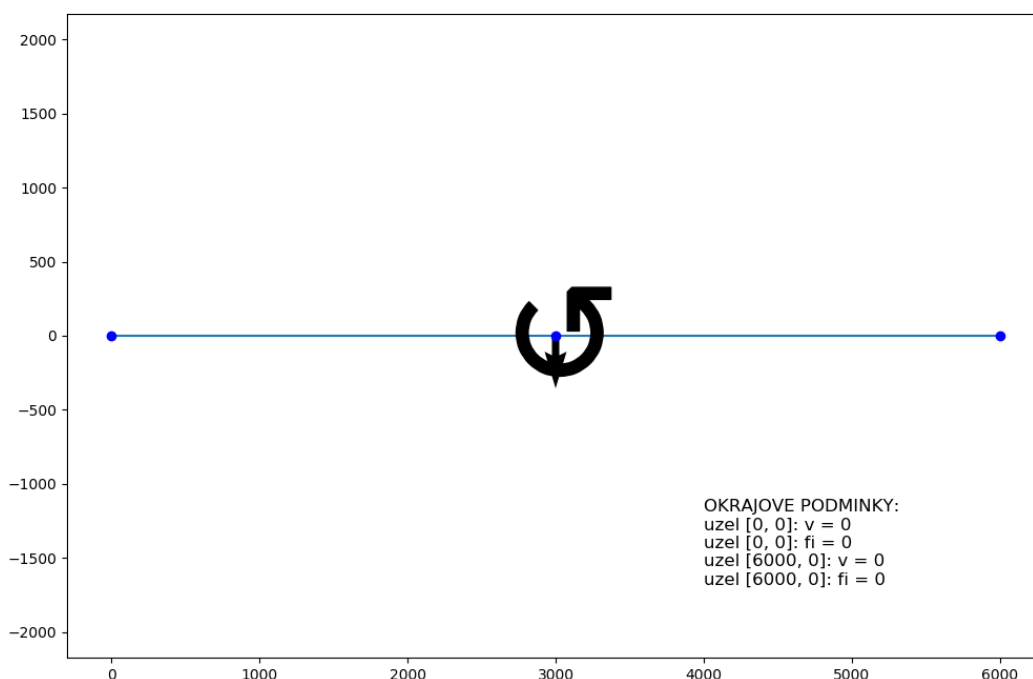
Tab. 1: Porovnání výpočtu tahového zatížení

	Navržený software	ANSYS	Odchylka [%]
Maximální posuv [mm]	3,4377	3,449	0,33
Maximální tahové napětí [MPa]	61,859	61,862	0,005
Maximální tlakové napětí [MPa]	-82,479	-82,483	0,005

Rozdíly ve vypočtených hodnotách se liší velice málo, jsou nejspíše způsobeny numerickou chybou výpočtu. Takto malou procentuální odchylku lze považovat za zanedbatelnou, hodnotím tedy výpočet pro tahové zatížení jako vyhovující.

4.2 Porovnání nosníkového prvku

Porovnání provedu pro ohýbaný oboustranně vetknutý prut zatížený uprostřed silou a momentem. Jeho délka je $L = 6000 \text{ mm}$, kvadratický moment příčného průřezu $J = 400\,000\,000 \text{ mm}^4$, průřez je kruhový a je vyroben z materiálu s modulem pružnosti v tahu $E = 210 \text{ GPa}$. Působící síla má velikost $F = 10 \text{ kN}$ a zátěžný moment je $M = 20\,000 \text{ Nm}$. Zadání vykreslené navrženým softwarem je na obr. 23. Prut je rozdělen na dva nosníkové prvky.

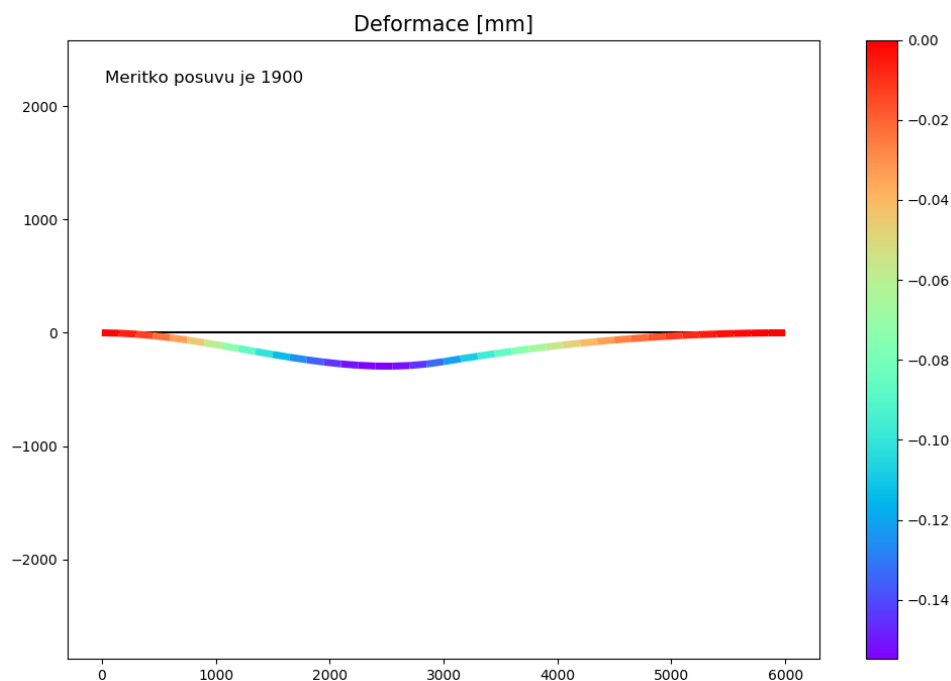


Obr. 23: Zadání ohýbaného prutu

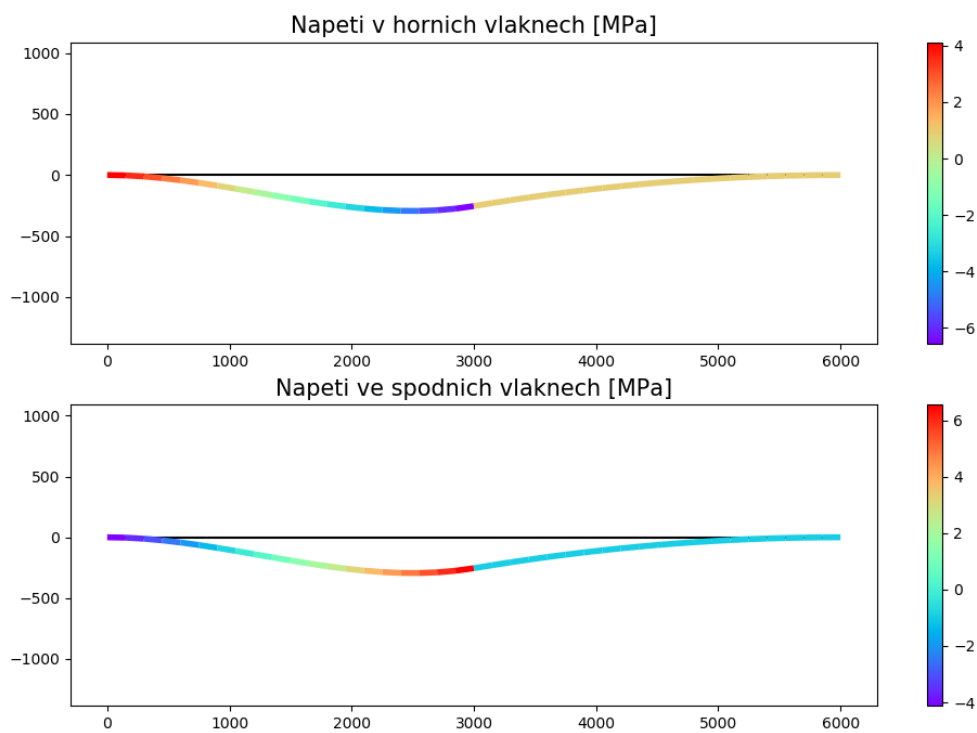
V obr. 24 až 28 je deformovaný tvar vykreslen s násobkem zvětšení 1900.

Navržený software

Následující obrázky ukazují deformaci prutu s vykreslením posuvů a napětí.



Obr. 24: Ohýbaný prut – deformace vypočtená navrženým softwarem

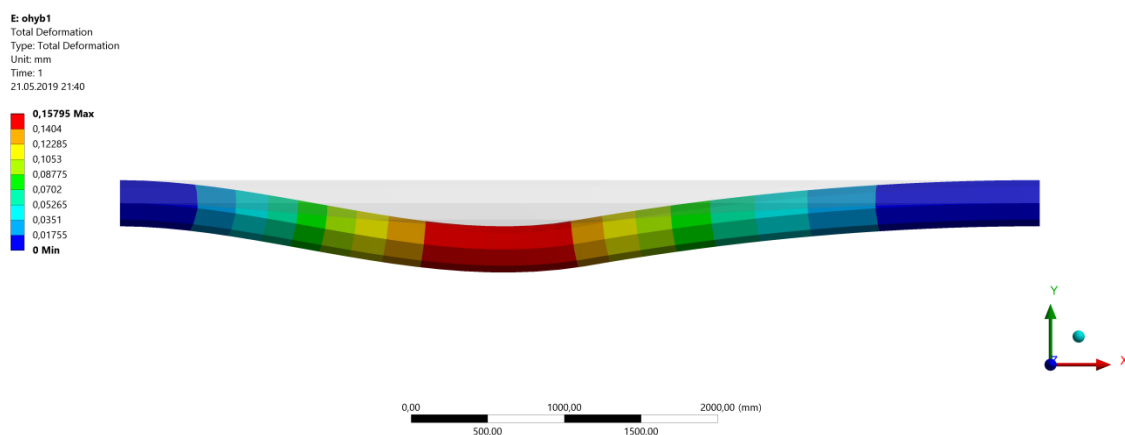


Obr. 25: Ohýbaný prut – napětí vypočtené navrženým softwarem

Maximální hodnota průhybu je $0,1548\text{ mm}$, extrémní napětí v horních vláknech je $4,131\text{ MPa}$ a $-6,572\text{ MPa}$, ve spodních vláknech jsou maximální hodnoty tahového a tlakového napětí $6,572\text{ MPa}$ a $-4,131\text{ MPa}$.

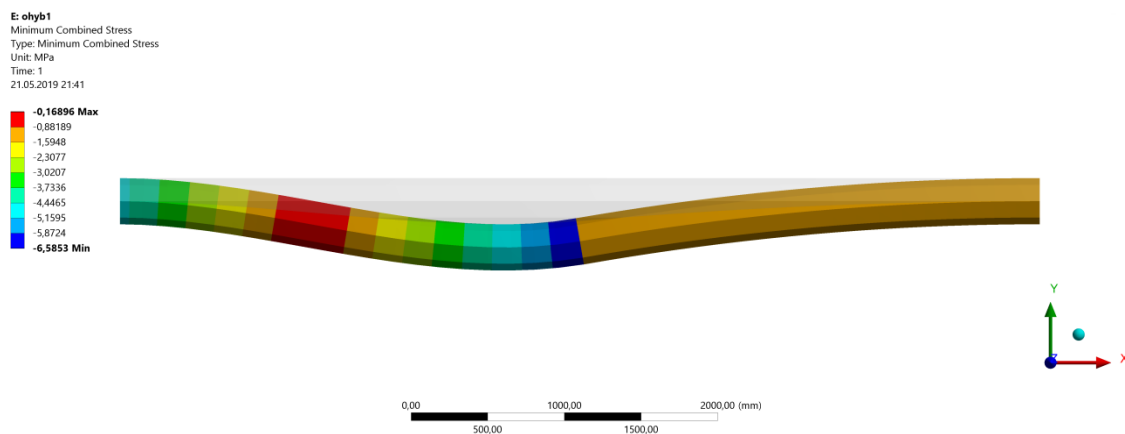
ANSYS

K výpočtu byl použit prvek BEAM188. Geometrie prutu byla vytvořena ze dvou částí, tak aby uprostřed vznikl bod, do kterého bude možno aplikovat zatížení. Každá z těchto částí byla rozdělena na 20 konečných prvků. Vetknutí bylo realizováno funkcí FIXED SUPPORT na obou koncích prutu, prostřednímu bodu byl navíc pomocí funkce DISPLACEMENT odebrán posuv v ose z. Následně bylo aplikováno zatížení.

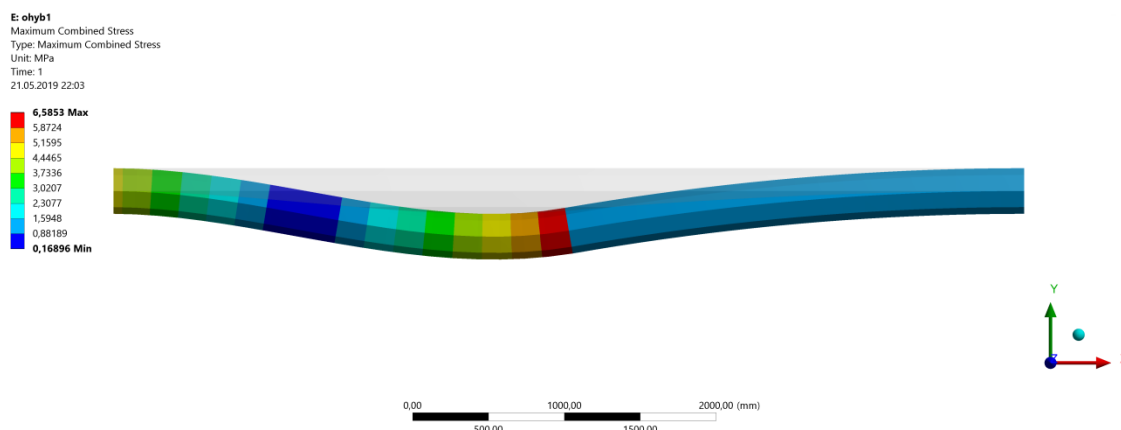


Obr. 26: Ohýbaný prut – deformace vypočtená komerčním softwarem

Obrázek napětí sice uvedu, ale nedá se rovnou porovnat s vykreslením napětí navrženým softwarem. To z toho důvodu, že navržený software vykresluje napětí zvlášť pro horní vlákna a zvlášť pro dolní vlákna, tedy v obou těchto podčástech se objevuje jak tahové, tak tlakové napětí. ANSYS ale napětí vykresluje jinak, a to tak, že do jednoho obrázku vykreslí všechna tahová a do druhého všechna tlaková napětí.



Obr. 27: Ohýbaný prut – tlakové napětí vypočtené komerčním softwarem



Obr. 28: Ohýbaný prut – tahové napětí vypočtené komerčním softwarem

Maximální hodnota průhybu je $0,158\text{ mm}$, největší tahové napětí $6,585\text{ MPa}$ a maximální tlakové $-6,585\text{ MPa}$.

Porovnání

Prvním porovnáním je kontrola deformovaného tvaru. Jak lze vidět, vykreslil navržený software deformovaný tvar stejně, maximální průhyb se nenachází uprostřed prutu, ale je od něj mírně vlevo. Porovnáním napětí lze ověřit, že je opravdu v druhé části prutu konstantní nebo téměř konstantní. Nyní porovnám číselné hodnoty.

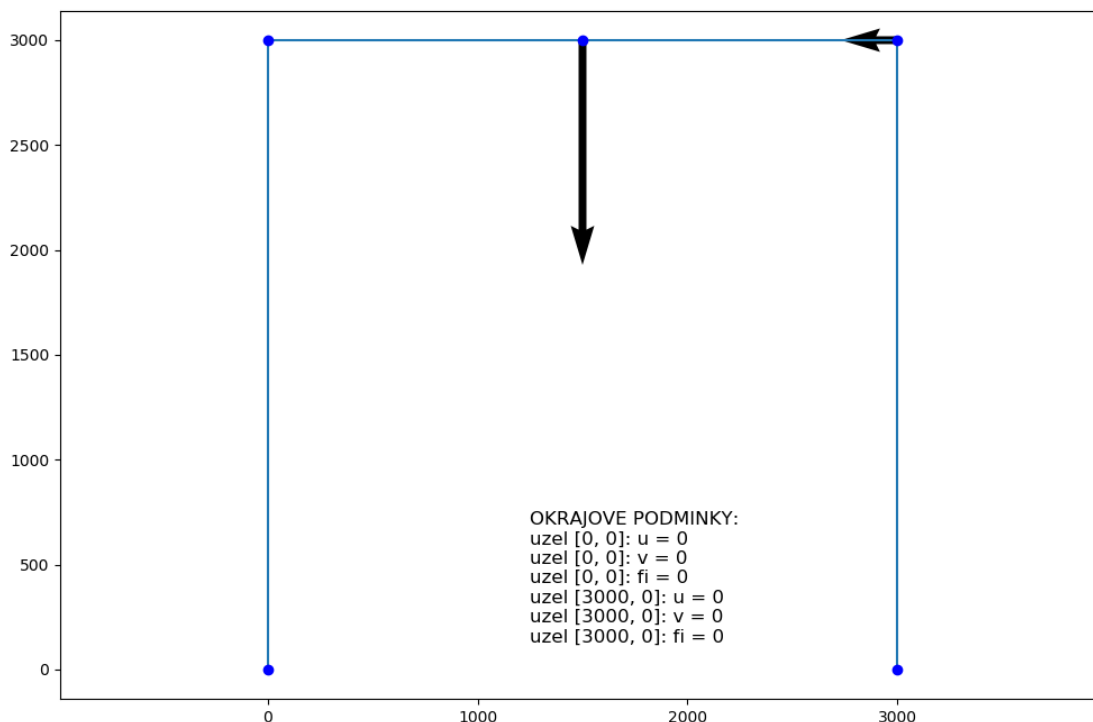
Tab. 2: Porovnání výpočtu nosníkového prvku

	Navržený software	ANSYS	Odchylka [%]
Maximální průhyb [mm]	0,1548	0,158	2,03
Maximální tahové napětí [MPa]	6,572	6,585	0,2
Maximální tlakové napětí [MPa]	-6,572	-6,585	0,2

Rozdíly ve vypočtených hodnotách mohou být způsobeny tím, že prvek ANSYSu BEAM188 uvažuje i vliv smyku, což nosníkový prvek navrženého softwaru nedělá. Další chyba může být vnesená už tím faktem, že se jedná o numerický výpočet, kde se vždy nějaká chyba objevuje, stejně tak tím, že síť v ANSYSu byla mnohem jemnější, kdežto navržený software většinu hodnot získal aproximací. Dalším faktorem by mohlo být i to, že maximální průhyb je malá hodnota, tedy se vliv numerické chyby projeví mnohem víc. Nicméně chyba 2% není závažná, a proto hodnotím výpočet provedený navrženým softwarem jako úspěšný.

4.3 Porovnání rámového prvku

Porovnání provedu pro jednoduchou konstrukci složenou ze tří prutů. Délka všech prutů je $L = 3000 \text{ mm}$, všechny mají kruhový průřez o průměru $d = 100 \text{ mm}$ a jsou vyrobeny z materiálu o modulu pružnosti v tahu $E = 200 \text{ GPa}$. Síla působící uprostřed vodorovného prutu má velikost $F_1 = 3000 \text{ N}$, druhá síla je $F_2 = 400 \text{ N}$. Oba spodní uzly jsou vetknuté. Zadání je na obr. 29. Svislé pruty jsou diskretizovány jedním rámovým prvkem po délce, vodorovný prut je rozdělen na dva stejné prvky.

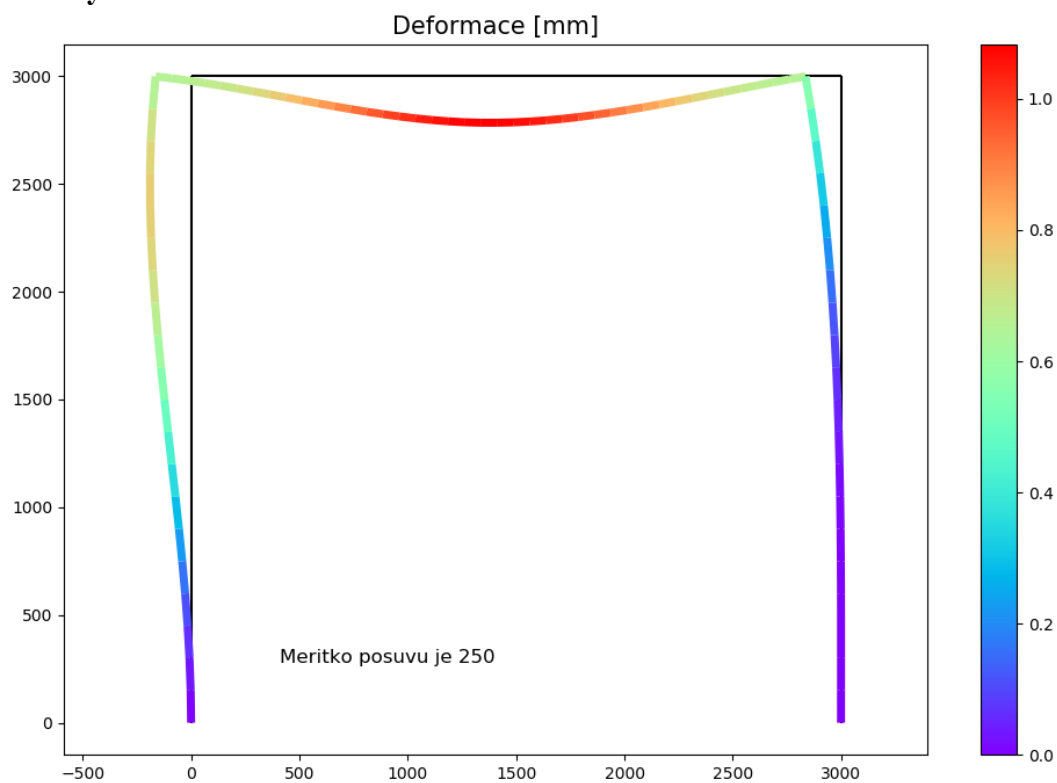


Obr. 29: Zadání pro úlohu s rámovými prvky

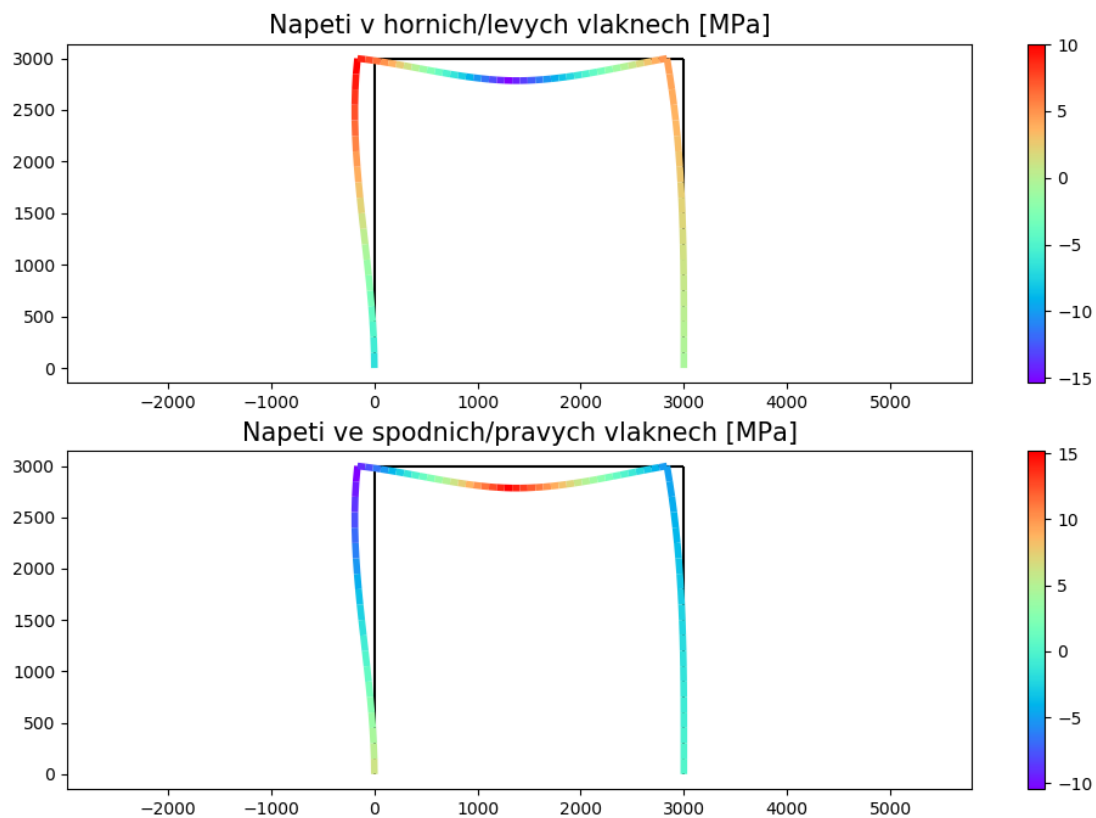
Maximální hodnota posunutí je $1,0836 \text{ mm}$, největší tahové napětí $15,207 \text{ MPa}$ a maximální tlakové $-15,353 \text{ MPa}$.

V obr. 30 až 32 je deformovaný tvar vykreslen s násobkem zvětšení 250.

Navržený software



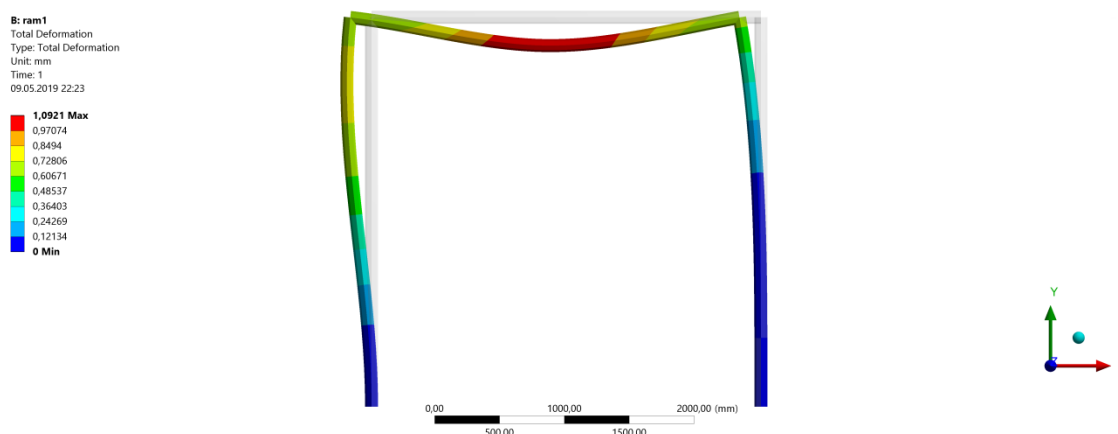
Obr. 30: Deformace rámových prvků – navržený software



Obr. 31: Napětí rámových prvků – navržený software

ANSYS

K výpočtu byl použit prvek BEAM188. Každá z částí prutů byla rozdělena na 20 konečných prvků. Vetknutí bylo realizováno funkcí FIXED SUPPORT v obou spodních uzlech, horním bodům byl navíc pomocí funkce DISPLACEMENT odebrán posuv v ose z a funkcí FIXED ROTATION rotace v ose y a v ose x. Následně bylo aplikováno zatížení.



Obr. 32: Deformace rámových prvků – ANSYS

Obrázek napětí tentokrát uvádět nebudu z výše uvedeného důvodu.

Maximální hodnota posunutí je $1,0921\text{ mm}$, největší tahové napětí $15,243\text{ MPa}$ a maximální tlakové $-15,39\text{ MPa}$.

Porovnání

Prvním porovnáním je kontrola vykresleného deformovaného tvaru. Jak lze vidět, vykreslil navržený software deformovaný tvar stejně, hlavně je dodrženo nulové natočení ve vetknutí. Nyní porovnám číselné hodnoty.

Tab. 3: Porovnání výpočtu s rámovými prvky

	Navržený software	ANSYS	Odchylka [%]
Maximální posuv [mm]	1,0836	1,0921	0,778
Maximální tahové napětí [MPa]	15,207	15,243	0,236
Maximální tlakové napětí [MPa]	-15,353	-15,39	0,24

Rozdíly ve vypočtených hodnotách mohou být způsobeny ze stejných důvodů jako v předchozím případě. Může to být opět tím, že prvek ANSYSu BEAM188 uvažuje i vliv smyku, což rámový prvek navrženého softwaru nedělá. Stejně tak další chyba může být vnesena už tím faktem, že se jedná o numerický výpočet nebo tím, že síť v ANSYSu byla mnohem jemnější. Nicméně chyba do 1% není závažná, a proto hodnotím výpočet provedený navrženým softwarem jako úspěšný.

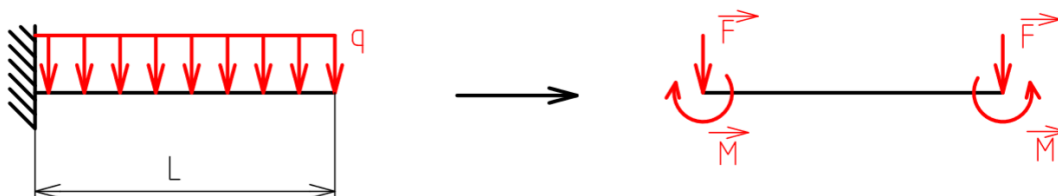
4.4 Omezení softwaru a nastínění možné budoucí práce

4.4.1 Omezení a nedostatky softwaru

Jak již bylo řečeno několikrát výše, software je omezen pouze pro prutové prvky ve 2D. Zatížení je možné pouze silami a momenty. Pokud na prut působí konstantní liniové zatížení, je nutné ho před zadáním do softwaru převést na zatížení mající na prut stejný účinek. Pro liniové zatížení působící kolmo na osu prutu se to provede následujícím způsobem [2] – nahradí se dvěma silami a dvěma momenty, jak je vidět na obr. 33. Síly míří obě stejným směrem jako liniové zatížení a jejich velikost je uvedena v rovnici (58), kde $q [N \cdot mm^{-1}]$ je hodnota liniového zatížení a $L [mm]$ délka prutu. Směr momentu je takový, aby vystihl účinek liniového zatížení na daný uzel, tedy nikdy oba momenty nepůsobí ve stejném směru. Jejich velikost ale stejná je a je uvedena vztahem (59). Při zadávání těchto hodnot do softwaru je samozřejmě nutné ctít znaménkovou konvenci, tedy obě síly, tak jak jsou na obr. 33, by při zadávání měly nulovou složku působící v ose x a zápornou složku v ose y, moment v pravém uzlu by měl kladnou velikost, v levém zápornou.

$$F = \frac{q \cdot L}{2} \quad (58)$$

$$M = \frac{q \cdot L^2}{12} \quad (59)$$



Obr. 33: Náhrada liniového zatížení

Pokud liniové zatížení působí v ose prutu, nahradí se dvěma silami, jednou v každém uzlu, působící ve stejném směru jako nahrazované liniové zatížení. Každá ze sil má velikost danou vztahem (58). Pro liniové zatížení působící na prut pod úhlem se nejdříve toto zatížení rozloží do zatížení ve směru osy a kolmo na osu a dále se postupuje stejnou náhradou, jak je uvedeno výše.

Pro výpočet pouze ohýbaného prutu je podmínkou, aby osa prutu byla rovnoběžná s globální osou x.

Okrajové podmínky je možné zadávat pouze v globálním souřadném systému. Předepsané posuvy a natočení mohou být pouze nulové.

Co se týče nedostatků softwaru, chtělo by zvážit, zda by nebylo lepší se u vykreslování napětí u rámových prvků inspirovat ANSYSem, protože nyní to může být matoucí. Nemusí být vždy jasné, co je horní a spodní vlákno. Dalším nedostatkem může být to, že při řešení větší soustavy prutů by mohlo být zadávání úloh zdlouhavé.

4.4.2 Budoucí práce

Některá výše uvedená omezení by se dala vyřešit budoucím pokračováním v tvorbě softwaru, například formou diplomové práce. Jedním z řešených omezení by mohla být možnost zadávání liniového zatížení. Do softwaru by se poté mohla zadat pouze hodnota konstantního liniového zatížení, pod jakým úhlem a mezi kterými uzly působí a software by sám provedl náhradu do uzlů. Stejně tak by se dal software rozšířit o možnost deformačního zatížení.

Dalším směrem budoucí práce by mohlo být rozšíření softwaru pro další prvky, například skořepinový, který by modeloval střednicovou plochu skořepiny. Dále by to mohly být prvky rovinné, to už by ale bylo složitější, protože by bylo nutné navíc vytvořit další část softwaru, která by měla za úkol na dané oblasti vytvořit síť konečných prvků.

Hlavní směr v pokračování tvorby tohoto softwaru ale leží v tvorbě uživatelského rozhraní k již vytvořenému softwaru, které by zlepšilo uživatelský komfort při zadávání úlohy, například by se úloha mohla zadávat graficky, aby uživatel nemusel vypisovat souřadnice uzlů. Stejně tak by mohlo být vytvořeno více variant pro vykreslení výsledků pevnostní analýzy, mezi kterými by uživatel přepínal.

5 ZÁVĚR

Hlavním cílem bakalářské práce bylo vytvořit software pro pevnostní analýzu prutových prvků, který umožní obecné zadání soustavy těchto prvků a zatížení, provede výpočet metodou konečných prvků a výsledky názorně zobrazí. Vytvořený software je přílohou této práce. Text práce čtenáře seznamuje jak s teorií potřebnou k vytvoření tohoto softwaru, tak se softwarem samotným. Důraz je kladen na jednoznačný popis, jak má uživatel do softwaru zadávat potřebné veličiny a údaje.

Výsledky pevnostní analýzy z navrženého softwaru byly porovnány s výsledky získanými v programu ANSYS Workbench. Porovnání bylo provedeno na příkladu pro každý ze tří typů úlohy, který software umí řešit. Prvním je namáhání tahem a tlakem (používá se pro řešení prutových soustav), druhým typem je namáhání pouze ohybem a třetí úloha je kombinací obou předchozích, čili mohou se řešit soustavy prutů, kde je část prutů namáhána na ohyb, část je zatížena v ose a část je namáhána kombinovaně. Z provedeného srovnání je patrné, že navržený software počítá všechny typy úloh s vyhovující přesností, největší odchylka je 2 %, jak lze vidět z celkového porovnání v tab. 4.

Tab. 4: Celkové porovnání procentuálních odchylek v získaných hodnotách

	Prvek zatížený v ose	Nosníkový prvek	Rámový prvek
Maximální posuv	0,33	2,03	0,778
Maximální tahové napětí	0,005	0,2	0,236
Maximální tlakové napětí	0,005	0,2	0,24

Zároveň si myslím, že je software dostatečně uživatelsky příjemný. Jeho výhodou je možnost zadání jakéhokoli příčného průřezu, jednoduché zadávání okrajových podmínek, s čímž souvisí rychlost v jejich změně na jiné, například nahrazení vetknutí rotační vazbou nebo náhrada rotační vazby podporou.

Hlavní přínos práce vidím v převedení teorie MKP do jednoduchých algoritmů, které jsou navíc díky jednoduché syntaxi Pythonu dobře pochopitelné i pro někoho, kdo není příliš zbláhlost v programování. Toho mohou využít zájemci o MKP, kterým může software sloužit pro pochopení základů této metody a také toho, jak pracují komerční softwary založené na této metodě. Software lze také použít pro výpočet pevnostní analýzy menších a jednodušších soustav prutů, například pokud není k dispozici žádný z komerčních softwarů kvůli jejich vysoké ceně.

Budoucí pokračování, například formou diplomové práce, se může ubírat více směry. Tím hlavním by bylo vytvoření uživatelského rozhraní k již vytvořenému softwaru, které by zlepšilo uživatelský komfort při zadávání úlohy nebo by mohlo být vytvořeno více variant pro zobrazování výsledků pevnostní analýzy, mezi kterými by si uživatel vybíral podle momentálně nejvhodnějšího.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

- [1] ZIENKIEWICZ, Olek, Robert TAYLOR a J. Z. ZHU. *The Finite Element Method: its Basis and Fundamentals: Seventh Edition* [online]. 7. vyd. 2013 [cit. 18.3.2019]. ISBN 978-1-85617-633-0. Dostupné z: doi:10.1016/C2009-0-24909-9
- [2] LOGAN, Daryl L. *A First Course in the Finite Element Method*. 6. vyd. 2016. ISBN 978-1-305-63734-4.
- [3] SERVÍT, Radim, Zbyněk DRAHOŇOVSKÝ, Jiří ŠEJNOHA a Václav KUFNER. *Teorie pružnosti a plasticity II*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, n.p., 1984. ISBN -.
- [4] PETRUŠKA, Jindřich. *MKP v inženýrských výpočtech* [online]. 2001 [cit. 5.2.2019]. Dostupné z: [http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP v inzenyrskych vypoctech/RIV.pdf](http://www.umt.fme.vutbr.cz/images/opory/MKP_v_inzenyrskych_vypoctech/RIV.pdf)
- [5] KOLÁŘ, Vladimír, Jiří KRATOCHVÍL, František LEITNER a Alexander ŽENÍŠEK. *Výpočet plošných a prostorových konstrukcí metodou konečných prvků*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, n.p., 1972. ISBN -.
- [6] *General Python FAQ* [online]. Poslední změna 21.5.2019. [cit. 22.5.2019] Dostupné z: <https://docs.python.org/3.6/faq/general.html>
- [7] *Introduction to Computer Science and Programming using Python* [online]. [cit. 8.4.2019]. Dostupné z: <https://www.edx.org/course/introduction-to-computer-science-and-programming-using-python-2>
- [8] VAN DER WALT, Stefan, S. Chris COLBERT a Gaël VAROQUAUX. The NumPy Array: A Structure for Efficient Numerical Computation. *Computing in Science & Engineering* [online]. 2011, **13**(2), 22–30, [cit. 17.5.2019]. ISSN 1558-366X. Dostupné z: doi:10.1109/MCSE.2011.37
- [9] HUNTER, John D. Matplotlib: A 2D Graphics Environment. *Computing in Science & Engineering* [online]. 2007, **9**(3), 90–95, [cit. 17.5.2019]. ISSN 1558-366X. Dostupné z: doi:10.1109/MCSE.2007.55
- [10] JONES, Eric, Travis E. OLIPHANT a Pearu PETERSON. *SciPy: Open Source Scientific Tools for Python* [online]. 2001- [cit. 17.5.2019]. Dostupné z: <https://www.scipy.org/>
- [11] TORBORG, Scott. Minimal Structure. *How To Package Your Python Code* [online]. [cit. 20.3.2019] Dostupné z: <https://python-packaging.readthedocs.io/en/latest/minimal.html>
- [12] *Python Application Layouts: A Reference* [online]. [cit. 20.3.2019] Dostupné z: <https://realpython.com/python-application-layouts/>
- [13] *About ANSYS* [online]. [cit. 28.4.2019]. Dostupné z: <https://www.ansys.com/about-ansys>
- [14] *ANSYS® Student Workbench, Release 19.2*

SEZNAM SYMBOLŮ

Symbol	Veličina	Jednotka
W_o	průřezový modul v ohybu	mm^3
u_i	posuv v globální ose x uzlu číslo i	mm
y_{max}	vzdálenost krajního vlákna od neutrálné osy ve směru osy y	mm
y_{min}	vzdálenost krajního vlákna od neutrálné osy proti směru osy y	mm
Π	potenciál	J
B	derivace bázové funkce	—
E	modul pružnosti v tahu	MPa
F	síla	N
J	kvadratický moment příčného průřezu	mm^4
L	délka prvku	mm
M	moment	$N \cdot mm$
N	bázová funkce	—
P	potenciál vnějšího zatížení	J
S	plocha příčného průřezu prutu/prvku	mm^2
W	energie napjatosti tělesa	J
d	průměr prutu/prvku	mm
q	hodnota konstantního liniového zatížení	$N \cdot mm^{-1}$
u	posuv v globální ose x	mm
u'	posuv v lokální ose x	mm
v	posuv v globální ose y	mm
v'	posuv v lokální ose y	mm
B	řádková matice derivací bázových funkcí	—
F	globální sloupcová matice vnějšího zatížení	—
F'	sloupcová matice vnějšího zatížení v lokálním souřadném systému	—
K	globální matice tuhosti	—
N	řádková matice bázových funkcí	—
O	sloupcová matice objemového zatížení	$N \cdot mm^{-3}$
T	transformační matice	—
U	globální sloupcová matice deformačních parametrů	—
U'	sloupcová matice deformačních parametrů v lokálním souřadném systému	—
k	prvková matice tuhosti v globálním souřadném systému	—
k'	prvková matice tuhosti v lokálním souřadném systému	—
p	sloupcová matice plošného zatížení	MPa
u	sloupcová matice posuvů	mm
ε	přetvoření	—

σ	napětí	<i>MPa</i>
φ	natočení kolem osy z	<i>rad</i>
ε	sloupcová matice přetvoření	–
σ	sloupcová matice napětí	<i>MPa</i>

SEZNAM OBRÁZKŮ

Obr. 1: Osově zatížený prut	22
Obr. 2: Příklad 1	23
Obr. 3: Osově zatížený prvek v lokálním souřadném systému.....	25
Obr. 4: Bázové funkce nosníkového prvku	28
Obr. 5: Rámový prvek v lokálním souřadném systému.....	29
Obr. 6: Kladné směry zatížení a deformačních parametrů rámového prvku	30
Obr. 7: Zadání úlohy	34
Obr. 8: Zadání úlohy v prostředí Spyderu	35
Obr. 9: Postup softwaru	36
Obr. 10: Příklad 2.....	37
Obr. 11: Vykreslení zadání – příklad 2	38
Obr. 12: Tvorba globální matice tuhosti	39
Obr. 13: Aplikace okrajových podmínek.....	40
Obr. 14: Shrnutí nejdůležitějších bodů softwaru	42
Obr. 15: Výpis extrémních hodnot	42
Obr. 16: Vykreslení průhybu	43
Obr. 17: Vykreslení napětí.....	43
Obr. 18: Mostní konstrukce – zadání.....	45
Obr. 19: Mostní konstrukce – deformace vypočtená navrženým softwarem	46
Obr. 20: Mostní konstrukce – napětí vypočtené navrženým softwarem	46
Obr. 21: Mostní konstrukce – deformace vypočtená komerčním softwarem.....	47
Obr. 22: Mostní konstrukce – napětí vypočtené komerčním softwarem.....	47
Obr. 23: Zadání ohýbaného prutu	48
Obr. 24: Ohýbaný prut – deformace vypočtená navrženým softwarem	49
Obr. 25: Ohýbaný prut – napětí vypočtené navrženým softwarem	49
Obr. 26: Ohýbaný prut – deformace vypočtená komerčním softwarem.....	50
Obr. 27: Ohýbaný prut – tlakové napětí vypočtené komerčním softwarem	50
Obr. 28: Ohýbaný prut – tahové napětí vypočtené komerčním softwarem	51
Obr. 29: Zadání pro úlohu s rámovými prvky	52
Obr. 30: Deformace rámových prvků – navržený software.....	53
Obr. 31: Napětí rámových prvků – navržený software.....	53
Obr. 32: Deformace rámových prvků – ANSYS	54
Obr. 33: Náhrada liniového zatížení	55

SEZNAM TABULEK

Tab. 1: Porovnání výpočtu tahového zatížení.....	48
Tab. 2: Porovnání výpočtu nosníkového prvku	51
Tab. 3: Porovnání výpočtu s rámovými prvky.....	54
Tab. 4: Celkové porovnání procentuálních odchylek v získaných hodnotách.....	57

SEZNAM PŘÍLOH

K práci je přiloženo CD, které obsahuje elektronickou verzi práce a vytvořený software ve formě knihovny. Ve složce knihovny *examples* naleznete vzorová volání různých typů příkladů a ukázkou použití knihovny v Jupyteru.